

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Sección Departamental de Astronomía y Geodesia



TESIS DOCTORAL

El problema de Lagrange en cartografía

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Jorge Luis Andrés García

Director

Jesús Otero Juez

Madrid, 2016

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Sección Departamental de Astronomía y Geodesia

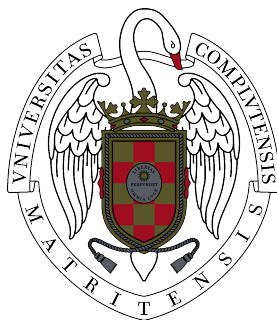
Tesis doctoral

El problema de Lagrange en cartografía

Jorge Luis Andrés García

Director
D. Jesús Otero Juez

Madrid, 2015



Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Sección Departamental de Astronomía y Geodesia

Tesis doctoral

El problema de Lagrange en cartografía

Jorge Luis Andrés García

Director
D. Jesús Otero Juez

Programa de doctorado
Ciencia y Tecnología de la Ingeniería Geodésica y Cartográfica
Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I

Madrid, 2015



A mis padres.

Abstract

This doctoral thesis is concerned with the Lagrange projections, that are conformal map projections of the oblate ellipsoid of revolution, which transform the meridians and parallels into circular arcs, and that we analyze and revise carefully from the original sources (Lambert, Lagrange, Bonnet, Chebyshev, etc.)

As an auxiliary tool, we introduce, for first time in cartography, the *characteristic function* of a conformal map projection: $m = |f'(z)|^{-1}$, $z = \lambda + iq$, where λ is the longitude and q is the isometric latitude on the ellipsoid. We use the term “characteristic” owing to the curvatures of the images of the meridians and the parallels are given, according to J. L. Lagrange (1779), by: $\kappa_1 = -m_\lambda$ y $\kappa_2 = m_q$, respectively (the subindex indicates partial derivative).

A conformal map projection is of Lagrange type if and only if $m_{\lambda q} = 0$. In this work we solve the system of equations: $\Delta \log m = 0$, $m_{\lambda q} = 0$. So we can a priori obtain the characteristic function of the Lagrange projections and we carry out a first classification: *rectilinears*, which are composed by three families: conformal cylindricals, conformal conics and azimuthals, and pseudopolars projections, which is new in cartography; and *circulars* composed by three families as well: Lagrange-Lambert, unipolars and apolars projections, these two last new in cartography. In the rectilinear projections any of the functions κ_i is identically zero whereas in the circulars ones these functions only vanish at some discrete points.

From the characteristic function we state the fundamental property of dependence between the coordinates (X, Y) of the transformed points by the circular Lagrange projections and $\{\kappa_1, \kappa_2\}$: $\kappa_2 X = \kappa_1 Y$. Based on this property, together with the Cauchy-Riemann conditions, we get their equations.

We bring in cartography two well known differential operators that we associate with any conformal map projection: the pre-schwarzian derivative or logarithm derivative of $f'(z)$, $P(f) = d \log f' / dz$, and the Schwarz derivative or schwarzian, $S(f) = [P(f)]' - [P(f)]^2 / 2$. We prove that the vector of cur-

vatures $\kappa_1 + i\kappa_2$ equals to $mP(f)$, and that the circular Lagrange projections have the following property: $P(f)$ y $f(z)$ are linearly dependent.

We obtain the following relationship between the schwarzian and the derivatives of κ_i :

$$mS(f) = \frac{1}{2}[(\kappa_2)_q + (\kappa_1)_\lambda] - i(\kappa_1)_q,$$

and solve the equation $S(f) = \text{real constant}$, or Lagrange-Schwarz characterization of the Lagrange projections. We classify its solutions in three classes that in every case are linear rational transformations of: z , conformal cylindricals and unipolars projections; $\exp(icz)$, composed by the conformal conics and azimuthals, and Lagrange-Lambert projections; and $\exp(cz)$, formed by the pseudopolars and apolars projections.

We study the geometrical properties of these six families of projections and their value in cartography. For example, after K. Carne (1990), we prove that every conformal map projection can be approximated at any point by an unipolar projection, in the sense of coincidence with $f(z)$ up to the second derivative, the schwarzian measuring the error of the approximation. Our analysis of the Lagrange-Lambert projections brings up-to-date the simple solution given by O. Bonnet (1852): $f(z) = k \operatorname{tg}[c(z - z_0)/2]$, where $k > 0$, $c > 0$ is the *exponent* of the projection and z_0 its *center*.

We define the *geodesic points* of a conformal map projection as those where the curvature of the image of any geodesic passing through them becomes zero, and we observe that these points are the optimal ones for the projection. Indeed, in polar geodesic coordinates around one of these points the projection fits the stereographic, which is the conformal map projection with minimal distortion for a geodesic disk. With a view to local optimization, we write the Hessian of the logarithm of the infinitesimal scale, $g = \log \sigma$, at a geodesic point, in terms of its latitude and the real and imaginary parts of $S(f)$.

We revise and update the Lagrange local optimization problem at a geodesic point. For the Lagrange-Lambert projections we characterize their geodesic points and obtain the geodesic point equation together with the Hessian of g in terms of projections's exponent and the exponent of the locally best projection after Lagrange. To simplify, we prove for the sphere that on the principal meridian there is one, and only one, geodesic point if and only if $c \in (0, 1] \cup [\sqrt{2}, \infty)$, which is elliptic in the first component $(0, 1]$; in addition, in the inner interval $(1, \sqrt{2})$ the number of geodesic points is equal to: 1 (hyperbolic), 2 (one parabolic plus one hyperbolic) or 3 (one elliptic plus two hyperbolics) depending of the projection center latitude.

The question of the global optimization, that is to say, to get the “best” Lagrange-Lambert projection on a given region, in the sense that the amplitu-

de of g , or *distortion* of the projection, will be a minimum, is also discussing. Chebyshev's principle states that the function g of the minimum distortion conformal projection, that we denotes by g_0 , is constant on the boundary of the region, and that the reciprocal is true as well.

According to this principle, we reformulate and solve the optimization problem of P. L. Chebyshev (1856), who restricted himself to elliptic Lagrange-Lambert projections: to minimize the distortion, subject to the condition that the boundary of a given country will be contained in the closure of the region bounded by a level curve of g . In a neighbourhood of the elliptic geodesic point x_0 the level curves of g are ovals that in quadratic approximation become ellipses oriented following the meridian and the parallel of x_0 . The essential property that we use is the direct proportionality existing between the square of the bisector radius («diamètre moyen, qui est également incliné vers les deux axes» in the words of Chebyshev) of every level ellipse and the distortion of the projection on the interior domain. As a result of this, by an affine linear transformation, we can reduce the question to a problem of finding the smallest enclosing circle for a point set. For three cases we have obtained the best Chebyshev projection. In Spain, for example, we obtain a Lagrange-Lambert projection with a distortion $\delta = 0.001952$, 15 % less than the best conformal conic.

To measure the extent to which a conformal map projection defined on a domain Ω deviates from the minimum distortion one, we propose the *relative distortion*, that we denotes by δ_R , defined as the amplitude in Ω of the difference function $g - g_0$. In virtue of the maximum principle, δ_R is equal to the amplitude of g on the boundary of Ω , simplifying the computation and minimization of this kind of distortion. For Spain we get the minimum *relative* distortion Lagrange-Lambert projection with an overall or absolute distortion equal to $\delta = 0.001874$. We do the same for Switzerland and Portugal obtaining $\delta = 0.0001234$ and $\delta = 0.0002491$, respectively.

For these countries we also compute the minimum *absolute* distortion Lagrange-Lambert projection whose minimum values are as follows. Spain: $\delta = 0.001856$, 19 % less than the best conformal conic and 44 % less than the UTM (zone 30). Switzerland: $\delta = 0.0001234$, 17 % less than the best conformal conic and 82 % less than the UTM (zone 32). Portugal: $\delta = 0.0002453$, 13 % less than the UTM (central meridian -8°) and 76 % less than the best conformal conic. Clearly our results improve those of the more well known projections. It is also remarkable that the values obtained minimizing the absolute and relative distortion are almost equal, because, as we have already indicated, to minimize the relative distortion is easier and less exposed to errors than dealing with the absolute distortion where we need to solve two minimum problems.

Resumen

Esta Tesis trata sobre las proyecciones de Lagrange, que son proyecciones conformes del elipsoide de revolución sobre el plano, que transforman los meridianos y paralelos en arcos circulares, y que analizamos y revisamos, con especial cuidado en las fuentes originales (Lambert, Lagrange, Bonnet, Chebyshev, etc.)

Como herramienta auxiliar, introducimos en cartografía la *función característica* de una proyección conforme: $m = |f'(z)|^{-1}$, $z = \lambda + iq$, fundamentados en que las curvaturas de las imágenes de los meridianos y paralelos son, según J. L. Lagrange (1779): $\kappa_1 = -m_\lambda$ y $\kappa_2 = m_q$, respectivamente (el subíndice indica derivada parcial). Parametrizamos el elipsoide mediante la longitud geodésica o geográfica λ y la latitud isométrica q .

Una proyección conforme es de Lagrange si y solo si $m_{\lambda q} = 0$. En este trabajo resolvemos el sistema de ecuaciones: $\Delta \log m = 0$, $m_{\lambda q} = 0$. De este modo obtenemos a priori la función característica de las proyecciones de Lagrange y también realizamos una primera clasificación: *rectilíneas*, formada por tres familias: Cilíndricas conformes, Cónicas y acimutales conformes y Pseudopolares, esta última es nueva en cartografía; y *circulares*, formada también por tres familias: De Lagrange-Lambert, Unipolares y Apolares, estas dos últimas nuevas en cartografía. En las rectilíneas todos los meridianos o todos los paralelos se transforman en rectas. En las circulares solo algunos meridianos o paralelos son rectilíneos.

A partir de la función característica establecemos la propiedad fundamental: $\kappa_2 X = \kappa_1 Y$, de dependencia entre las coordenadas (X, Y) de los puntos transformados según las proyecciones de Lagrange circulares y las curvaturas de las imágenes de meridianos y paralelos. Basados en esta propiedad, junto con las condiciones de Cauchy-Riemann, determinamos sus ecuaciones.

También por primera vez en cartografía, hemos introducido dos operadores diferenciales asociados con una proyección conforme: la derivada preschwarziana o derivada logarítmica de $f'(z)$, $P(f) = d \log f' / dz$, y la derivada de Schwarz o schwarziana, $S(f) = [P(f)]' - [P(f)]^2 / 2$. Demostramos que el vector de curvaturas $\kappa_1 + i\kappa_2$ coincide con $mP(f)$ y que las proyecciones de

Lagrange circulares tienen la siguiente propiedad: $P(f)$ y $f(z)$ son linealmente dependientes.

Obtenemos que la schwarziana está relacionada con las derivadas de las curvaturas según la expresión

$$mS(f) = \frac{1}{2}[(\kappa_2)_q + (\kappa_1)_\lambda] - i(\kappa_1)_q,$$

y resolvemos la ecuación $S(f) = \text{constante real}$, o caracterización de Lagrange-Schwarz de las proyecciones de Lagrange. Clasificamos sus soluciones en tres clases que, en todos los casos, son transformaciones racionales lineales de: z , Cilíndricas conformes y Unipolares; $\exp(icz)$, Cónicas y acimutales conformes, y de Lagrange-Lambert; $\exp(cz)$, Pseudopolares y Apolares.

Las propiedades geométricas de las seis familias de proyecciones de Lagrange y su utilidad en cartografía son estudiadas en profundidad en esta Tesis. Por ejemplo, siguiendo a K. Carne (1990), demostramos que toda proyección conforme se puede aproximar en un punto mediante una proyección unipolar, en el sentido de coincidencia de $f(z)$ hasta la segunda derivada, y la schwarziana da una medida de la aproximación. Nuestro propio análisis de las proyecciones de Lagrange-Lambert conduce a una formulación actual de la solución de O. Bonnet (1852): $f(z) = k \operatorname{tg}[c(z - z_0)/2]$, donde $k > 0$, $c > 0$ es el *exponente* de la proyección y z_0 es el *centro*.

Definimos los *puntos geodésicos* de una proyección conforme como aquellos donde se anula la curvatura de las imágenes de todas las geodésicas que pasan por ellos, y observamos que estos puntos son los óptimos de la proyección. En efecto, en coordenadas geodésicas polares centradas en uno de estos puntos la proyección se ajusta a la proyección estereográfica que es la proyección conforme de distorsión mínima para un disco geodésico. Con vistas a la optimización local, expresamos la matriz hessiana del logaritmo de la escala infinitesimal, $g = \log \sigma$, en un punto geodésico, en función de su latitud y de las partes real e imaginaria de $S(f)$.

Revisamos y actualizamos el problema de optimización local de Lagrange en un punto geodésico. Para las proyecciones de Lagrange-Lambert caracterizamos sus puntos geodésicos, obtenemos la ecuación de punto geodésico y la hessiana de g en función del exponente de la proyección y el exponente de la *proyección localmente óptima según Lagrange*. Para la esfera, por simplificar la presente exposición, demostramos que en el meridiano principal hay un único punto geodésico si y solo si $c \in (0, 1] \cup [\sqrt{2}, \infty)$, que es elíptico en la primera componente $(0, 1]$; además, en el intervalo interior $(1, \sqrt{2})$ el número de puntos geodésicos es: 1 (hiperbólico), 2 (uno parabólico y uno hiperbólico) o 3 (uno elíptico y dos hiperbólicos), dependiendo del valor de la latitud del centro de la proyección.

En este trabajo está tratada la cuestión de la optimización global, es decir, obtener la mejor proyección de Lagrange-Lambert para una región dada en el sentido de que la amplitud de g , o *distorsión* de una proyección conforme, sea mínima. El *principio de Chebyshev* establece que la función g de la proyección conforme de distorsión mínima sobre una región es constante en su frontera, y viceversa.

Replanteamos y resolvemos el problema de P. L. Chebyshev (1856): para un país dado determinar la proyección de Lagrange-Lambert de distorsión mínima, sujeta a la condición de que la frontera del país esté contenida en la clausura de la región limitada por una de las curvas de nivel de g . Cuando la proyección de Lagrange-Lambert admite un punto geodésico elíptico x_0 , las curvas de nivel de g en un entorno de x_0 son óvalos que, en aproximación cuadrática, son elipses orientadas según el meridiano y el paralelo de x_0 . Dicha proyección es óptima en el interior de la región limitada por estas elipses, según el principio de Chebyshev.

El cuadrado del radio bisector (en palabras de Chebyshev «diamètre moyen, qui est également incliné vers les deux axes») de las elipses de Chebyshev es directamente proporcional a la distorsión, entonces la cuestión es encontrar la elipse más pequeña, radio bisector mínimo, que contiene al país (suponemos de pequeña o mediana extensión). Mediante cierta transformación afín resolvemos numéricamente el problema de Chebyshev reduciéndolo a uno de geometría computacional más conocido, la obtención del círculo más pequeño que contiene a un conjunto de puntos dado. En tres casos, España, Suiza y Portugal, hemos obtenido la proyección óptima de Chebyshev. Para España, por ejemplo, obtenemos una proyección de Lagrange-Lambert cuya distorsión es $\delta = 0.001952$, un 15 % menor que la mejor cónica conforme.

Definimos la *distorsión relativa*, representada por δ_R , de una proyección conforme sobre una región Ω como la amplitud de la función $g - g_0$, donde g_0 corresponde a la proyección conforme sobre Ω de distorsión mínima, distorsión que en este contexto llamamos *absoluta*. En virtud del principio del máximo, δ_R es igual a la amplitud de g en la frontera de Ω . Esto simplifica el cálculo y la minimización de este tipo de distorsión. Para España determinamos la proyección de Lagrange-Lambert que minimiza δ_R , cuya distorsión es $\delta = 0.001874$. También lo hacemos para Suiza, $\delta = 0.0001234$, y Portugal, $\delta = 0.0002491$.

Por último, obtenemos la proyección de Lagrange-Lambert óptima (distorsión absoluta mínima) para los países ya citados. España: $\delta = 0.001856$, un 19 % menor que la mejor cónica conforme y un 44 % menor que la UTM (huso 30). Suiza: $\delta = 0.0001234$, un 17 % menor que la mejor cónica conforme y un 82 % menor que la UTM (huso 32). Portugal: $\delta = 0.0002453$, un 13 % menor que la UTM (meridiano central -8°) y un 76 % menor que la mejor

cónica conforme. Como se observa en los tres casos, estos resultados mejoran los de proyecciones conocidas, pero además estas distorsiones absolutas son prácticamente iguales a las obtenidas al minimizar la distorsión relativa, problema, como hemos dicho, más sencillo de resolver y menos expuesto a errores de cálculo que el de minimizar la amplitud de g en toda la región, cuestión que plantea dos problemas de mínimo.

Índice

Abstract	V
Resumen	IX
Prefacio	XV
Introducción	XVII
1. Proyecciones conformes del elipsoide	1
1.1. Definición	2
1.2. Aplicación diferencial de una proyección	5
1.3. Teorema fundamental de las proyecciones conformes	7
1.4. Función exponencial	15
1.5. Transformaciones racionales lineales	18
2. Leyes de curvatura de la representación conforme	27
2.1. Cambio de curvatura en transformaciones conformes	27
2.2. Derivada pre-schwarziana	33
2.3. Cambio de la derivada tangencial de la curvatura	37
2.4. Derivada de Schwarz	38
2.5. Curvatura de las proyecciones de líneas geodésicas	46
3. Teoría general de las proyecciones de Lagrange	53
3.1. Problemas de Lambert y de Lagrange	53
3.2. Función característica de las proyecciones de Lagrange	61
3.3. Construcción de las proyecciones	69
3.4. Segunda caracterización. Ecuación diferencial de Lagrange	76
3.5. Síntesis de las transformaciones de Lagrange	81
4. Proyecciones de Lagrange rectilíneas	85
4.1. Cilíndricas conformes	86
4.2. Cónicas y acimutales conformes	88

4.3. Proyecciones pseudopolares	92
5. Proyecciones unipolares	99
5.1. Ecuaciones canónicas	99
5.2. Meridianos, paralelos y loxodromas. Mapas	103
5.3. Utilidad en cartografía	109
6. Proyecciones de Lagrange-Lambert	117
6.1. Constantes fundamentales de las transformaciones bipolares de Lagrange	117
6.2. Función tangente. Forma canónica	121
6.3. Meridianos y paralelos	129
6.4. Mapas	138
6.5. Proyecciones apolares	145
7. Puntos geodésicos de proyecciones conformes	157
7.1. Optimización local de proyecciones conformes	158
7.2. Existencia y determinación en las proyecciones de Lagrange- Lambert	171
7.3. Optimización local de Lagrange	180
7.4. Clasificación de los puntos geodésicos	189
8. Optimizaciones intermedia y global de las proyecciones de Lagrange-Lambert	205
8.1. Teorema de Chebyshev-Gravé-Milnor	205
8.2. Problema de Chebyshev	210
8.3. Distorsiones relativa y absoluta	232
Conclusiones	244
A. Traducción de las dos Memorias de Lagrange	249
Referencias	301

Prefacio

Es deuda de profunda gratitud reconocer la dedicación desinteresada de D. Jesús Otero Juez para que la Tesis que presento aquí pueda ser digna de ese nombre. Profesor y tutor en mi primer curso de doctorado y director, en el segundo, del trabajo de investigación que es germen del presente texto, su vasto conocimiento en cartografía matemática y también experiencia han enriquecido este trabajo en forma y contenido.

Mi agradecimiento se extiende a los profesores del primer curso de doctorado, en especial quiero recordar al catedrático D. Miguel Jesús Sevilla de Lerma por su valiosa ayuda, prestada siempre que he necesitado de ella.

Introducción

La proyección de Lagrange es una representación conforme del elipsoide de revolución sobre el plano euclidiano que transforma el sistema de meridianos así como el de paralelos en sendos sistemas de arcos circulares. Esta descripción es la que aparece actualmente en libros de texto y referencia [Bugayevskiy y Snyder, 1995], álbumes de proyecciones cartográficas [Snyder y Voxland, 1989], sitios web especializados (<http://www.mapmathematics.com>), etc. Se clasifica en la categoría de las proyecciones policónicas, o se incluye en un grupo misceláneo junto con proyecciones tan diferentes a ella como la de Adams o la quinuncial de Pierce. Caída en el olvido a pesar de la sencillez de sus ecuaciones, hoy prevalece la proyección transversa de Mercator (UTM) que presenta mayor complejidad. Sobre dicho abandono es significativo el comentario del geodesta británico Close [1905, Capítulo XI, p. 101] dedicado a la proyección de Lagrange: «More interesting to the mathematician than useful to the map-maker.»

Problema de Lagrange. Marco histórico

La definición anterior remite a un conjunto infinito de proyecciones gobernado por cuatro constantes fundamentales. Fueron obtenidas por el matemático francés, nacido en Turín, J. L. Lagrange (1736-1813) en su célebre contribución a la cartografía *Sur la construction des cartes géographiques*, dividida en dos memorias y publicada en 1781 en las *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, année 1779*. Se alude a la Academia de Ciencias de Berlín, dirigida por Lagrange desde 1766 durante veinte años, quien sucede a L. Euler.

Para obtener las ecuaciones de las proyecciones, Lagrange plantea y resuelve el siguiente Problema: *determinar las proyecciones conformes del elipsoide de revolución sobre el plano que transforman los meridianos y los paralelos en arcos de circunferencia*. Primero ha resuelto el problema de obtención de las ecuaciones de cualquier proyección conforme de una superficie de revo-

lución sobre el plano [Lagrange, 1779, § 3]. Después [§ 6] escribe (el corchete es nuestro):

La cuestión se reduce a determinar la forma de las funciones desconocidas de la solución general de modo que de ello resulten líneas de una naturaleza dada para los meridianos y para los paralelos. Esta cuestión aún no ha sido resuelta [...] pero para las necesidades de la Geografía basta resolverla en el caso particular en que los meridianos y los paralelos deben ser arcos de circunferencia, lo que comprende a la vez los dos casos de la proyección estereográfica y de las Cartas reducidas [proyección de Mercator].

Lagrange permite que el radio de los arcos circulares sea infinito, luego el sistema de meridianos o el de paralelos, o ambos simultáneamente, pueden transformarse en rectas. Esto incluye a las proyecciones cilíndricas conformes (Mercator), a las acimutales conformes (estereográfica polar) y a las cónicas conformes de Lambert. Este es también el espíritu de nuestra Tesis y conduce a formular con más precisión el Problema de Lagrange: *determinar las proyecciones cartográficas conformes tales que los meridianos y los paralelos se transforman en curvas de curvatura constante mayor o igual que cero*.

Casi un siglo después, el matemático suizo K. von der Mühll [1868] generaliza el Problema de Lagrange al exigir que las imágenes de los meridianos y paralelos sean curvas algebraicas. Más tarde, el matemático ruso D. Grave [1896], alumno de Chebyshev en la Universidad de San Petersburgo, resuelve el problema semejante al de Lagrange para las proyecciones equivalentes (aquellas que conservan las áreas), en su «doctoral dissertation» de acuerdo con el Dictionary of Scientific Biography [1970, p. 508]. Precisamente P. L. Chebyshev (1821-1894) había contribuido al estudio de las proyecciones de Lagrange. En concreto, Chebyshev [1856a]-[1856b] aborda la optimización de dichas proyecciones para países de pequeña extensión; Lagrange en su Segunda Memoria lo hace localmente.

Siete años antes de la obra de Lagrange, el matemático alemán J. H. Lambert (1728-1777) escribe un trabajo fundamental en cartografía: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelskarten* (Notas y comentarios sobre la composición de cartas terrestres y celestes). Aquí, Lambert [1772, Capítulo V, §§ 58-64] se topa con las proyecciones de Lagrange, porque aplica a la estereográfica ecuatorial su método para obtener las cónicas conformes a partir de la estereográfica polar [Capítulo IV, §§ 47-57]. Dicho método se basa en contraer la longitud de los meridianos en los polos. De este modo Lambert construye la conocida representación conforme de la esfera terrestre sobre un círculo —figura 1—. Por esta razón, en nuestra Tesis llamamos *de Lagrange-Lambert* a estas proyecciones. No es cierta la afirmación de J. P. Snyder [1993, Capítulo 2, p. 80]: «The Lagrange projection was promoted but not invented by its namesake. Instead, it was derived by

Lambert.» Sin embargo, más adelante [p. 82], Snyder se refiere a ellas como proyecciones «Lambert/Lagrange». En la Sección 3.1 exponemos el procedimiento de Lambert y analizamos esta polémica.

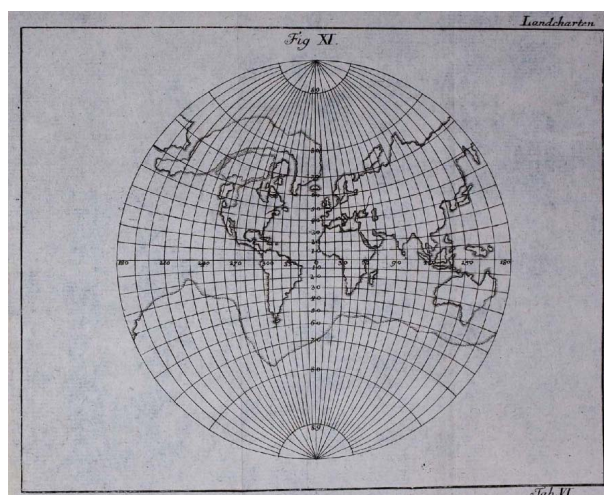


Fig. 1. Proyección de Lagrange-Lambert de la esfera sobre un círculo. Facsímile del trabajo de Lambert [1772, Capítulo v, § 63].

En 1852 O. Bonnet contribuye notablemente a la cartografía, en particular a la teoría de las proyecciones de Lagrange-Lambert. Su trabajo se titula *Sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques* y constituye su *Thèse d'Astronomie*. Nabonnand [2012, § 4, p. 112], en un estudio sobre el problema matemático de la cartografía en el siglo XIX, explica que «la defensa de una tesis en la Francia de aquella época está asociada con la redacción de dos memorias, la primera dedicada a un trabajo original y la segunda a un trabajo más relacionado con la compilación o comprensión de una cuestión». La tesis de Bonnet que nos ocupa es la segunda pero «aporta a la cuestión algunas innovaciones».

Bonnet demuestra que la transformación conforme asociada con estas proyecciones es la función tangente. Antes resuelve el que denomina *problema de Lambert*: determinar las proyecciones conformes de la superficie terrestre sobre el plano. Así lo expresa [Bonnet, 1852, Introducción, p. 302]:

Lambert se proposa de déterminer les lignes des méridiens et des parallèles par la condition que la similitude eût lieu seulement entre les éléments infiniment petits. [...] Lambert ne résolut pas d'une manière complète le problème général qu'il s'était posé.

Como dijimos más arriba, Lagrange [1779, §§ 1-3] también resuelve este problema. C. F. Gauss (1777-1855) pone fin a la cuestión, pues extiende dicho

problema a las aplicaciones conformes entre dos superficies del espacio euclidiano. Su trabajo, de 1822, se titula *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (en resumen, representación de una superficie sobre otra de modo que sea semejante en las partes infinitamente pequeñas), y le hace merecedor del premio de la Real Sociedad de Ciencias de Copenhague. (Digno es mencionar la traducción al italiano que de esta memoria realiza E. Beltrami: *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data...*) El mérito de Bonnet es la simplificación que alcanza, debido a que trabaja con coordenadas isotropas: $ds^2 = 2F dudv$ [Struik, 1950, § 5.2, ecuación (2.5)]. La nota de J. Liouville que cierra el artículo de Bonnet finaliza con este halago: «Et en attendant j'applaudis à ce que M. Bonnet a pu ajouter de neuf aux travaux de ses devanciers.»

El espacio entre Gauss y Bonnet lo llena el matemático alemán C. G. J. Jacobi (1804-1851) por sus trabajos sobre las proyecciones conformes del elipsoide de tres ejes. En referencia a la memoria de Gauss de 1822, Jacobi escribe en la 28.^a de sus Lecciones sobre Dinámica [1884, p. 215]: «In derselben geschieht der Lagrangeschen Arbeit, der nur wenig hinzuzusetzen war, keine Erwähnung.» (It contains Lagrange's work that is only a little bit supplemented without being mentioned.) La traducción al inglés se debe al matemático y cartógrafo croata Miljenko Lapaine y puede consultarse en http://dc358.4shared.com/doc/fq_drIEv/preview.html, Sección 3, página 7.

Otros autores se han interesado también por las proyecciones de Lagrange. En Francia: A. A. C. Germain [1866] quien transmite, entre otros, el trabajo de Bonnet [1852] al gran público; N. A. Tissot [1881]; J. G. Darboux [1887]; L. Driencourt y J. Laborde [1932]. En Estados Unidos: T. Craig [1882]; O. S. Adams [1919]; B. H. Brown [1935]; J. P. Snyder [1993]. En Alemania: G. Lehmann [1939]; R. König y K. H. Weise [1951]. En España: S. A. Laplaza [1940] y [1941]. Especialmente, Tissot [1881, Complément, § 111] introduce nuevas coordenadas a las que denomina *longitude modifiée d'un méridien* y *latitude modifiée d'un parallèle*, y expresa las ecuaciones de las proyecciones de Lagrange-Lambert en función de ellas. (Nosotros lo hacemos al final de la Sección 6.3.) Autores posteriores recogen esta aportación, que ha llegado hasta nuestros días, por ejemplo, Bugayevskiy y Snyder [1995, § 4.2.1, p. 137, ecuación (4.3)].

Función característica. Derivada de Schwarz

En el Capítulo 3 presento dos nuevas formas de resolver el Problema de Lagrange, que proporcionan un conocimiento más detallado y esencial

de las proyecciones de Lagrange. Para ello nos basamos en dos conceptos fundamentales en este trabajo.

Uno es la *función característica* de una proyección conforme:

$$m(z) = |f'(z)|^{-1},$$

donde $z = \lambda + iq$ representa coordenadas isométricas (longitud, latitud) o de Mercator, y $f(z)$ es la transformación conforme asociada con la proyección. Además, denominamos *constantes fundamentales* de una familia de proyecciones conformes a aquellas que intervienen en la función característica.

El otro es la *derivada de Schwarz* o *schwarziana* de una función analítica $f(z)$:

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = [P(f)]' - \frac{1}{2} [P(f)]^2.$$

El operador $P(f) = f''/f'$ se denomina *derivada pre-schwarziana* y también tiene un papel relevante en el estudio de las proyecciones conformes, según demostramos en la Sección 2.2. En la Proposición 2.3 establecemos la relación entre la función característica y la derivada de Schwarz.

La schwarziana interviene en diferentes ramas de las matemáticas, por ejemplo: la teoría de las funciones univalentes [Lehto, 1987] o la geometría diferencial proyectiva [Ovsienko y Tabachnikov, 2009]. Es A. Cayley [1881] quien acuña el término en honor a H. A. Schwarz (1843-1921). Este utilizó el operador diferencial en sus investigaciones dedicadas a las transformaciones conformes que llevan el semiplano superior a dominios acotados por un número finito de arcos circulares [Schwarz, 1869]. El libro de Nehari [1952, § 5.7] resuelve de forma amena este problema. Sin embargo, Schwarz reconoce que el origen del operador se encuentra en la Primera Memoria de Lagrange. En efecto, F. Klein [1884, § 3.6] escribe (el corchete es nuestro):

Según una comunicación por la cual estoy agradecido al Señor Schwarz, esta expresión [la schwarziana] se encuentra en las investigaciones de Lagrange sobre representación conforme: «Sur la construction des cartes géographiques,» Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin, 1779.

Poco después, Schwarz [1890, pp. 350-355] publica unas notas y comentarios sobre su trabajo de 1869 donde demuestra la afirmación anterior de Klein. Autores actuales otorgan a Lagrange definitivamente la prioridad en el descubrimiento de la schwarziana [Ovsienko y Tabachnikov, 2009].

Primera caracterización de las proyecciones de Lagrange

En el Capítulo 2 establecemos las leyes de curvatura en transformaciones conformes. La *primera ley*, Teorema 2.1, relaciona la curvatura de una curva

con la de su imagen, en términos de la función característica y de sus derivadas parciales. La pre-schwarziana interviene en esta ley si tenemos en cuenta la identidad

$$P(f) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \log m + i \frac{\partial}{\partial q} \log m,$$

que demostramos en la Proposición 2.2.

Consecuencia de la primera ley de curvatura es la *fórmula de Lagrange* para cualquier proyección conforme, Teorema 2.2:

$$k(z) = -\frac{\partial m}{\partial \lambda} + i \frac{\partial m}{\partial q}, \quad (1)$$

donde las componentes real e imaginaria de $k(z)$ son las curvaturas de las imágenes de los meridianos y de los paralelos respectivamente. De aquí se deduce la *primera caracterización* de las proyecciones de Lagrange, que obtiene el propio autor [Lagrange, 1779, § 9]: *la segunda derivada mixta de la función característica es nula*, es decir,

$$\boxed{\frac{\partial^2 m}{\partial \lambda \partial q} = 0}, \quad (2)$$

que recogemos en el Teorema 3.2.

A diferencia de Lagrange y autores posteriores, en la Sección 3.2 resolvemos la ecuación diferencial (2), con la condición de que $\log m$ es una función armónica (Proposición 2.1). Así determinamos las funciones características asociadas con las proyecciones de Lagrange. Conocidas las curvaturas de las imágenes de los meridianos y paralelos en virtud de (1), construimos las proyecciones en la Sección 3.3. Este primer método conduce al Teorema 3.5, que establece la siguiente propiedad de las proyecciones de Lagrange-Lambert:

$$f(z) = \frac{1}{c^2} P(f),$$

donde c es una constante real positiva.

Segunda caracterización

La *segunda ley* de curvatura, Teorema 2.3, relaciona la derivada de la curvatura de una curva con la derivada de la curvatura de su imagen. La schwarziana interviene en esta ley. Esto proporciona la *segunda caracterización*,

que demostramos en el Teorema 3.6: *una proyección conforme es de Lagrange si y solo si la schwarziana es constante real*, es decir, si y solo si

$$S(f) = k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Denominamos *ecuación diferencial de Lagrange* a esta ecuación diferencial de tercer orden. Está implícita en la Primera Memoria de Lagrange [1779, § 10], según observa acertadamente Schwarz [1890, p. 352]. A. Wangerin [1894, p. 90] recoge la observación de Schwarz en su traducción al alemán de las Memorias de Lagrange, publicada junto con la de Gauss citada anteriormente. Wangerin titula el volumen: *Ueber kartenprojection. Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822)*. (Sobre proyecciones cartográficas. Tratados de Lagrange y Gauss.) Esto revela el aprecio que se rinde al trabajo de Lagrange en el siglo XIX, pues aparece junto a la influyente obra de Gauss sobre representación conforme.

Para obtener las soluciones de la ecuación de Lagrange (3) debemos *aplicar transformaciones racionales lineales*, $(Az + B)/(Cz + D)$, *al cociente de dos soluciones arbitrarias linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal*

$$g'' + \frac{k}{2}g = 0, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

B. G. Osgood [1998, § 2, p. 277] afirma que, hasta donde ha consultado, el origen de este resultado es un artículo de E. E. Kummer [1836] sobre la ecuación diferencial hipergeométrica; además, llama identidad de Kummer a

$$S(f) = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p',$$

donde $f(z)$ es el cociente de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + py' + qy = 0$. Si tenemos en cuenta la invarianza de la schwarziana respecto a transformaciones racionales lineales y tomamos $p = 0$ y $q = k/2$, entonces se comprende la afirmación inicial.

En los tres casos posibles: $k = 0$, $k = c^2/2$ y $k = -c^2/2$, donde c es una constante real positiva, los pares de soluciones independientes de (4) son $\{1, z\}$, $\{\exp(icz/2), \exp(-icz/2)\}$ y $\{\exp(cz/2), \exp(-cz/2)\}$ respectivamente. Los cocientes correspondientes o *soluciones básicas* de la ecuación de Lagrange son

$$z, \quad e^{icz} \quad \text{y} \quad e^{cz}.$$

Esto muestra que *las transformaciones racionales lineales y la función exponencial gobiernan las proyecciones de Lagrange*.

Por ejemplo, en la Sección 1.5 demostramos que la transformación conforme asociada con la proyección estereográfica ecuatorial de la esfera de radio R es

$$f(z) = -2Ri \frac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1} = 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2}.$$

Esta expresión ya era conocida, con notación moderna, por J. Dienger [1852, p. 267]. Aquí $c = 1$; Lagrange [1779, § 22] llama «exponente de la proyección» a la constante c .

En virtud de estos resultados surgen seis familias de proyecciones, expuestas en la siguiente tabla. Dividimos el conjunto de proyecciones de Lagrange en *rectilíneas* (R) y *circulares* (C). En el primer caso, todos los meridianos o todos los paralelos se transforman en rectas, pues a la solución básica se aplica una transformación lineal. En el segundo, solo algunos meridianos o paralelos son rectilíneos. Las condiciones que satisfacen A , B , C , D y c están ligadas a que la transformación sea conforme y a que los seis conjuntos de proyecciones tengan intersección vacía. La figura 2 muestra un mapa de cada familia.

$S(f) = k$	Sol. básica	Transf. conforme	Proyección de Lagrange
$k = 0$	z	$Az + B$	Cilíndricas conformes (R)
		$\frac{Az + B}{Cz + D}$	Unipolares (C)
$k = c^2/2$	e^{icz}	$Ae^{icz} + B$	Cónicas y acimutales conformes (R)
		$\frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}$	Lagrange-Lambert (C)
$k = -c^2/2$	e^{cz}	$Ae^{cz} + B$	Pseudopolares (R)
		$\frac{Ae^{cz} + B}{Ce^{cz} + D}$	Apolares (C)

Nuevas familias de proyecciones

Los nombres que asignamos a las proyecciones *unipolares*, *pseudopolares* y *apolares* en la tabla anterior son nuevos, porque estas familias han recibido una exigua o nula atención. Brown [1935, § 4, p. 215] solo proporciona las ecuaciones en coordenadas cartesianas, sin constantes fundamentales, y muestra un mapa de cada familia [pp. 220 y 221: figuras 2', 3 y 4']. Tissot [1881, Complément, §§ 119-121] hace un breve análisis de las apolares y dibuja la red de meridianos y paralelos de una en particular; en el último

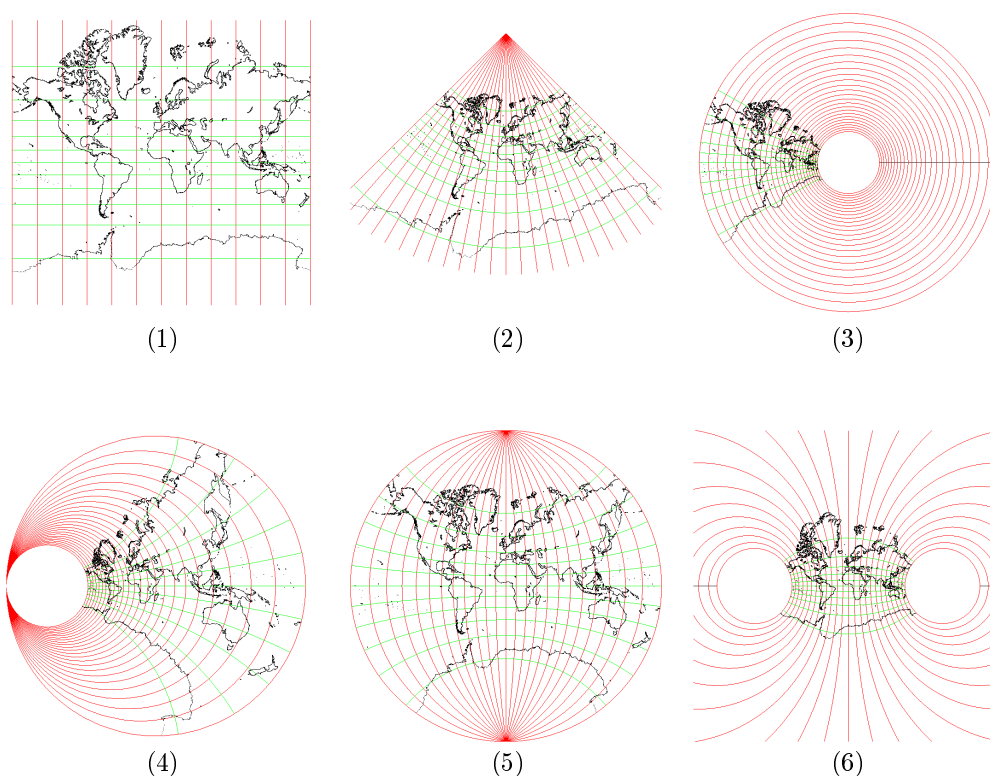


Fig. 2. Mapas de las seis familias de proyecciones de Lagrange. Rectilíneas: cilíndricas conformes (1), cónicas y acimutales conformes (2) y pseudopolares (3). Circulares: unipolares (4), Lagrange-Lambert (5) y apolares (6). Sistema de meridianos en rojo, y paralelos en verde.

párrafo comenta que esta proyección «est plus curieuse qu'utile». Nosotros realizamos un estudio exhaustivo de las tres familias y aportamos aplicaciones en cartografía.

El Capítulo 4 está dedicado a las proyecciones de Lagrange rectilíneas. Es aquí donde examinamos las pseudopolares, que están gobernadas por la función $\exp(cz)$. Los meridianos son circunferencias concéntricas y los paralelos son rectas concurrentes, es decir, se invierten los papeles respecto a las proyecciones cónicas conformes.

El Capítulo 5 se reserva a las proyecciones unipolares, que están determinadas por transformaciones racionales lineales o de Möbius aplicadas sobre el plano z o de Mercator. Algunas propiedades de estas transformaciones ya están expuestas en la Sección 1.5.

El matemático estadounidense W. P. Thurston [1986, pp. 185 y 186] afirma que *la schwarziana es muy parecida a una especie de curvatura en el*

sentido de que mide la desviación de una transformación conforme respecto a una transformación de Möbius. Precisamente $S(f) = 0$ si y solo si f es una transformación de Möbius. En palabras de Thurston:

The Schwarzian derivative is very much like a kind of curvature: the various kinds of curvature in differential geometry measure deviation of curves or manifolds from being flat, while the Schwarzian derivative measures the deviation of a conformal map from being a Möbius transformation. A Möbius transformation is determined by its two-jet (its value and first two derivatives) at any point. The two-jet is arbitrary, except for the proviso that the first derivative be nonsingular. Thus, for any locally univalent f and any point w in the domain of f there is associated a unique Möbius transformation $M(f, w)$ which agrees with f through second order.

Esta interpretación de la derivada de Schwarz tiene aplicación en la Sección 5.3. Demostramos que se puede aproximar en un punto cualquier proyección conforme mediante una proyección unipolar, en el sentido de Thurston (coincidencia hasta la segunda derivada), y que la schwarziana proporciona la medida de la aproximación. Ilustramos el método con la proyección transversa de Mercator.

En la Sección 6.5 abordamos las proyecciones apolares, que están gobernadas por la función de variable compleja tangente hiperbólica. La inclusión en el Capítulo 6, dedicado a las proyecciones de Lagrange-Lambert, obedece a lo siguiente: las circunferencias que representan los meridianos y los paralelos de las apolares coinciden, respectivamente, con las que representan los paralelos y los meridianos de aquellas.

Proyecciones de Lagrange-Lambert

En los últimos capítulos, 6, 7 y 8, con excepción de la Sección 6.5, nos ocupamos de las proyecciones de Lagrange-Lambert. Las transformaciones conformes asociadas con ellas, que llamamos *transformaciones bipolares de Lagrange* de exponente $c > 0$, son soluciones de la ecuación $S(f) = c^2/2$. Es la única familia de proyecciones de Lagrange que transforma los polos terrestres en dos puntos finitos y distintos del plano.

Las propiedades geométricas de estas proyecciones se estudian en el Capítulo 6. Primero demostramos que el número de constantes fundamentales es cuatro: el *exponente* c de la proyección, o constante que multiplicada por la diferencia de longitud de dos meridianos determina el ángulo que forman sus imágenes en los polos; el *centro* $z_0 = a + ib$ de la proyección, cuyo paralelo es el único que se transforma en una recta y cuyo meridiano, también rectilíneo, llamamos principal; y la *distancia* $2k$ que separa las imágenes de los polos terrestres. En la Sección 6.4 incluimos mapas realizados con Maple para diferentes elecciones del exponente y del centro.

En la Sección 6.2 obtenemos la *forma canónica* de Bonnet [1852, § 33] de las transformaciones bipolares de Lagrange, en función de las cuatro constantes fundamentales:

$$L(z) = -ki \frac{e^{ic(z-z_0)} - 1}{e^{ic(z-z_0)} + 1} = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right].$$

Debido a la naturaleza de esta familia de proyecciones, el caso $c = 1$ se corresponde con la proyección estereográfica, cuestión abordada por Lagrange [1779, §§ 28 y 29]. En efecto, en la Sección 1.5 demostramos que la función

$$E(z) = 2R \cosh q_0 \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{2}, \quad z_0 = \lambda_0 - iq_0,$$

gobierna la estereográfica centrada en (λ_0, q_0) , punto de tangencia de la esfera (radio R) con el plano donde se proyecta.

Las propiedades de las imágenes de los meridianos y de los paralelos se analizan en la Sección 6.3. El sistema de meridianos, en el mapa, es el haz de circunferencias que pasan por las imágenes de los polos terrestres, w_s y w_n , según ilustramos en la figura 3. En la Proposición 6.5 demostramos que el sistema de paralelos, en el mapa, es el haz de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos w_s y w_n . Una *circunferencia de Apolonio* es el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los resultados del Capítulo 6 no son nuevos pero sí lo son su unificación y modo de obtención.

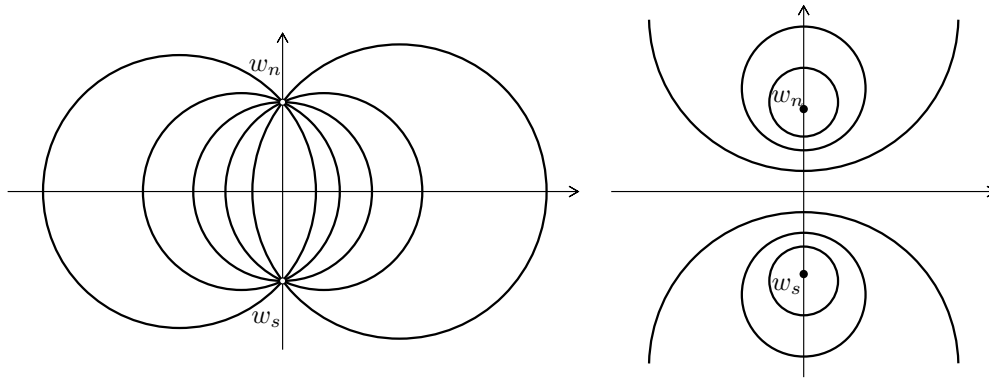


Fig. 3. Proyecciones de Lagrange-Lambert. Izquierda: meridianos, haz de circunferencias que pasan por w_s y w_n (imágenes de los polos terrestres). Derecha: paralelos, haz de circunferencias de Apolonio respecto a w_s y w_n .

Optimización

El origen de esta Tesis es la utilización de las proyecciones de Lagrange-Lambert para aproximar la mejor proyección conforme sobre un país, porque su dependencia de cuatro constantes les otorga mucha capacidad para ello frente a otras proyecciones.

Lagrange [1779, §§ 35-42] dedica parte de su Segunda Memoria a la optimización de las proyecciones de Lagrange-Lambert, cuestión que es la raíz del Capítulo 7. La optimización consiste en la determinación de las constantes fundamentales de modo que la escala infinitesimal difiera lo menos posible de una función constante. La optimización de Lagrange es local, en las proximidades de un punto. Él supone que un punto arbitrario es un punto crítico de la función $g = \log \sigma$, solución de la ecuación diferencial $\Delta g = r^2 K$, donde K es la curvatura de Gauss del elipsoide y r el radio de los paralelos.

Adoptamos esta idea y llamamos *punto geodésico* de una proyección conforme a los puntos críticos de g . El nombre obedece a que las geodésicas que lo cruzan se transforman en curvas de curvatura cero en la imagen del punto. En efecto, en el Teorema 2.4 demostramos la fórmula de Schols-Laborde:

$$K = -m \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle,$$

aquí K es la curvatura de la imagen de una geodésica mediante una proyección conforme y \mathbf{n} el vector unitario normal a la geodésica. Una proyección conforme es óptima en un punto geodésico, pues se asemeja a la estereográfica centrada en ese punto, que es la mejor proyección conforme para discos geodésicos.

Una caracterización de los puntos geodésicos es el Teorema 7.1:

$$P(f)(z) = i \sin \varphi, \quad (5)$$

donde φ es su latitud. La derivada de Schwarz interviene en la matriz hessiana de g en el punto geodésico —Teorema 7.2—, matriz útil en optimización.

En las proyecciones de Lagrange-Lambert, (5) implica que en un punto geodésico $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ $L(z_0) = i k c^{-1} \sin \varphi_0$. La matriz hessiana es:

$$Hg(x_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c^2 - \sin^2 \varphi_0 & 0 \\ 0 & c_L^2 - c^2 \end{bmatrix},$$

donde $c_L^2(\varphi_0) = 1 + \cos^2 \varphi_0 + 2e'^2 \cos^4 \varphi_0$ es el exponente de la proyección óptima de Lagrange para puntos del paralelo φ_0 . Un punto geodésico, en el meridiano principal, debe satisfacer la ecuación:

$$q - 2c^{-1} \operatorname{arctgh}(c^{-1} \sin \varphi) = b,$$

y de aquí se deduce que el número de puntos geodésicos de una proyección de Lagrange-Lambert es 1, 2 o 3, y depende de los valores de c , en primer lugar, y de b (Teorema 7.4). Por ejemplo, si $c \leq 1$ hay solamente uno. Los puntos geodésicos se clasifican según el signo de $c_L^2 - c^2$:

$$\begin{cases} \text{si } c < c_L \Rightarrow \text{elíptico} \\ \text{si } c = c_L \Rightarrow \text{parabólico} \\ \text{si } c > c_L \Rightarrow \text{hiperbólico.} \end{cases}$$

Problema de optimización de Chebyshev

El último capítulo se dedica a la optimización de las proyecciones de Lagrange-Lambert, abordada por Lagrange para las proximidades de un punto, es decir, localmente —Capítulo 7—. Ahora el problema es global en el sentido de encontrar las constantes de la proyección tales que, en una región dada, la amplitud de la función $g = \log \sigma$ (que llamamos *distorsión*) sea lo más pequeña posible. Esta es la idea que propone Chebyshev en sus dos trabajos fundamentales de cartografía ya citados. Según el Principio de Chebyshev *la mejor proyección conforme, distorsión mínima, está caracterizada por que su escala infinitesimal es constante en la frontera de la región*.

En la Sección 8.2, resolvemos el problema de optimización, en aproximación cuadrática, planteado por Chebyshev [1856b]: *determinar, para un país, la proyección de Lagrange-Lambert de distorsión mínima sujeta a la condición de que la frontera del país esté contenida en la clausura de la región limitada por una de las curvas de nivel de g* . Chebyshev descubre que la aproximación de segundo orden de dicha curva de nivel, en el entorno de un punto geodésico elíptico $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$, es una elipse centrada en x_0 y orientada según su meridiano y paralelo:

$$(1 + \alpha)(\lambda - \lambda_0)^2 + (1 - \alpha)(\varphi - \varphi_0)^2 = R_B^2,$$

$$R_B = \frac{2\sqrt{\delta}}{\cos \varphi_0 \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0}},$$

donde $\delta = g(x) - g(x_0)$ y $|\alpha| < 1$. Una importante propiedad es que el radio bisector, R_B , de esta elipse (módulo del radio vector que forma 45 grados con los semiejes) es proporcional a $\sqrt{\delta}$, cuestión al menos intuitiva por Chebyshev [1856b, Nota al pie de la p. 244].

La cuestión anterior se reduce a dos problemas de mínimo. 1.º Fijar α y, entre todas las elipses de Chebyshev que circunscriben la frontera del país para dicho α , determinar la de radio bisector mínimo. 2.º De todas las

elipses obtenidas en el primer paso tomar aquella de radio bisector mínimo. La relación entre R_B y δ permite resolver el problema de Chebyshev.

La distorsión de la proyección de Lagrange-Lambert que hemos obtenido para España, por ejemplo, es igual a 0.001952, un 15 % menor que el de la mejor proyección cónica conforme de Lambert. Véase la figura 4.

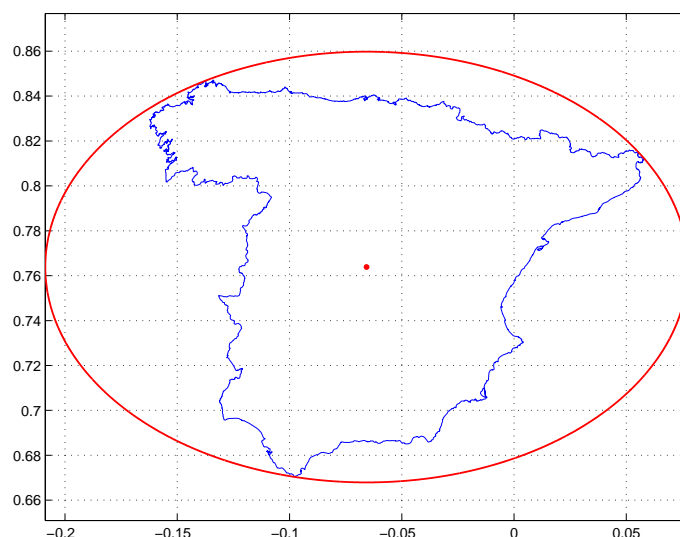


Fig. 4. Elipse óptima de Chebyshev para España. Los ejes están en coordenadas isométricas (λ, q) .

Chebyshev [1856b, p. 247] finaliza su trabajo con un ejemplo:

Observamos [...] que el centro de la menor elipse se encuentra entre Jaroslaff y Ouglitch en longitud 57° y latitud $57^\circ 36'$. Esta elipse, al tener su eje dirigido a lo largo del meridiano, abarca todos los dominios de Rusia hasta los Montes Urales, inclusive el Cáucaso y Georgia, y la razón de sus ejes es igual a $17/10$. Al tomar como base esta elipse hallamos que a la proyección más ventajosa corresponde el exponente 1,0788.

En la Sección 8.3, última, introducimos el concepto de distorsión relativa, δ_R , de una proyección conforme, que es igual a la amplitud de la función $g - g_0$. Aquí g_0 corresponde a la mejor proyección conforme para un país, la que minimiza la distorsión δ (que llamamos absoluta para distinguirla de la relativa). En virtud del Principio del máximo, δ_R es igual a la amplitud de g en la frontera del país, lo que simplifica el problema de minimizar la distorsión relativa.

Por ejemplo, para España la proyección de Lagrange-Lambert que minimiza δ_R tiene una distorsión $\delta = 0.001874$, un 19 % menor que la mejor cónica conforme de Lambert.

Finalmente, hallamos la mejor proyección de Lagrange-Lambert (distorsión absoluta mínima) para los siguientes países. Se observa que los resultados mejoran considerablemente los de proyecciones conocidas:

España. $\delta = 0.001856$ $\left\{ \begin{array}{l} 19\% \text{ menor que la mejor cónica conforme,} \\ 44\% \text{ menor que UTM (huso 30).} \end{array} \right.$

Suiza. $\delta = 0.0001234$ $\left\{ \begin{array}{l} 17\% \text{ menor que la mejor cónica conforme,} \\ 82\% \text{ menor que UTM (huso 32).} \end{array} \right.$

Portugal. $\delta = 0.0002453$ $\left\{ \begin{array}{l} 13\% \text{ menor que UTM meridiano central } -8^\circ, \\ 76\% \text{ menor que la mejor cónica conforme.} \end{array} \right.$

Todos los mapas de las proyecciones de Lagrange presentados en este trabajo han sido creados por nosotros con el software Maple. Los mapas de otras proyecciones han sido realizados con Maple o MATLAB. Para las figuras y gráficas hemos utilizado MATLAB, TpX (<http://tpx.sourceforge.net/>) y GeoGebra (<http://www.geogebra.org/>).

Capítulo 1

Proyecciones conformes del elipsoide

Definimos las proyecciones conformes y los elementos básicos del elipsoide de revolución. Después definimos la aplicación diferencial de una proyección, que permite caracterizar a las proyecciones conformes. Describimos la función exponencial y las transformaciones racionales lineales; ambas gobiernan proyecciones conformes básicas en cartografía.

La mayoría de los mapas topográficos a gran escala se basan en proyecciones conformes, en concreto, la transversa de Mercator y las cónicas conformes de Lambert. La razón está señalada por Gauss quien, en una carta al astrónomo danés Hansen, el 11 de diciembre de 1825, escribe [Dombrowski, 1979, p. 127]:

Tiene toda la razón de que la condición esencial en cualquier proyección cartográfica es la semejanza infinitesimal, condición que debe omitirse solamente en casos muy especiales de necesidad.

Junto a Gauss encontramos importantes matemáticos que han dirigido su atención a las proyecciones conformes. El siguiente recorrido es una muestra.

-
- * Siglo II: Ptolomeo, *Planisferio*. Describe la proyección estereográfica.
 - * 1569: Mercator, *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accommodata*. Presenta el mapa de la proyección conforme que lleva su nombre.
 - * 1772: Lambert, *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelskarten* (Notas y comentarios sobre la composición de cartas terrestres y celestes). Construye tres nuevas proyecciones conformes. Estas son, en nomenclatura moderna: las cónicas (que llevan su nombre), las de Lagrange (a partir de la estereográfica ecuatorial) y la cilíndrica transversa de la esfera (por modificación de la proyección sinusoidal).

- * 1777: Euler, *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*. Demuestra que no es posible representar la esfera en el plano de modo que exista una razón de semejanza constante.
- * 1779: Lagrange, *Sur la construction des cartes géographiques*. Resuelve el problema de hallar todas las proyecciones conformes del elipsoide cuya red de meridianos y paralelos es circular.
- * 1822: Gauss, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*. Establece la teoría general de transformación conforme de una superficie en otra.
- * 1852: Bonnet, *Sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques*.
- * 1856: Chebyshev, *Sur la construction des cartes géographiques*. Establece un principio de optimización de proyecciones conformes.
- * 1908: Hill, *Application of Tchêbychef's principle in the projection of maps*.
- * 1911: Gravé, *Démonstration d'un théorème de Tchêbychef généralisé*. Demuestra el teorema de Chebyshev sobre optimización de proyecciones conformes.
- * 1969: Milnor, *A problem in cartography*. Refina y demuestra el mencionado teorema de Chebyshev.

1.1. Definición

Sea Σ el elipsoide de revolución definido por

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \ a > b \right\}$$

y sea U un subconjunto abierto de Σ . Una *proyección cartográfica* p sobre U (en adelante proyección) es una función que asigna a cada punto de U un punto del plano euclidiano. Suponemos que p es diferenciable.

Una proyección $p : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es *conforme* si conserva los ángulos en magnitud y sentido. Es decir, en todo punto $\mathbf{x} \in U$, p tiene la siguiente propiedad: dado cualquier par de curvas orientadas C y C' que se corten en \mathbf{x} , entonces el ángulo orientado entre $p(C)$ y $p(C')$ coincide con el ángulo orientado entre C y C' . El sentido directo —contrario a las agujas del reloj— será el sentido positivo para la orientación de los ángulos.

A partir de esta definición es prácticamente imposible comprobar si una determinada proyección es conforme —salvo en el caso de la proyección estereográfica de la esfera, véase por ejemplo [Markushevich, 1970, p. 79]— o

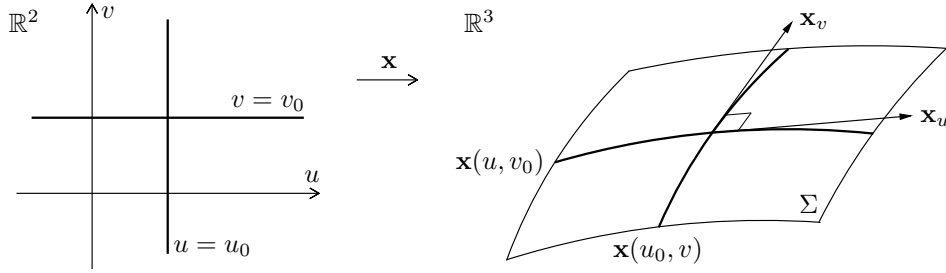


Fig. 1.1. Parametrización del elipsoide con vectores tangentes ortogonales.

construir proyecciones conformes con propiedades específicas. Sin embargo, sí podemos caracterizarlas mediante condiciones sencillas, teoría que para dos superficies cualesquiera fue establecida por Gauss [1822]. Para esto primero recordamos elementos básicos de la geometría del elipsoide.

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una parametrización de Σ . Si las curvas paramétricas o curvas coordenadas $\mathbf{x}(u_0, v)$ y $\mathbf{x}(u, v_0)$ son ortogonales —véase la figura 1.1—, entonces el elemento de arco o primera forma fundamental de la superficie es

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,$$

donde E y G son iguales al cuadrado de la norma euclidiana de los vectores tangentes \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , respectivamente. En el caso $E = G = h^2$, con $h = h(u, v)$, la parametrización se denomina *isométrica* y

$$ds^2 = h^2 (du^2 + dv^2).$$

En cartografía es habitual elegir como parámetros las coordenadas geodésicas: *longitud* λ y *latitud* φ , representadas en la figura 1.2. Las curvas coordenadas son los meridianos y los paralelos de Σ . En este caso

$$ds^2 = r^2 d\lambda^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad (1.1)$$

donde $r = r(\varphi)$ es el radio de los paralelos y $\rho = \rho(\varphi)$ es el radio de curvatura de la elipse de meridiano $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$. Las expresiones de estas funciones son [Zakatov, 1981, §§ 1.4 y 1.5]:

$$r = N \cos \varphi, \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (1.2)$$

y

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (1.3)$$

donde $e^2 = 1 - b^2/a^2$ es el cuadrado de la primera excentricidad de Σ y N es el radio de curvatura de la sección normal al elipsoide que es perpendicular a la sección del meridiano. La curvatura de Gauss de Σ es

$$K = N^{-1}\rho^{-1}. \quad (1.4)$$

Las fórmulas de esta parametrización son:

$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \\ y = r \sin \lambda \\ z = (1 - e^2) N \sin \varphi. \end{cases}$$

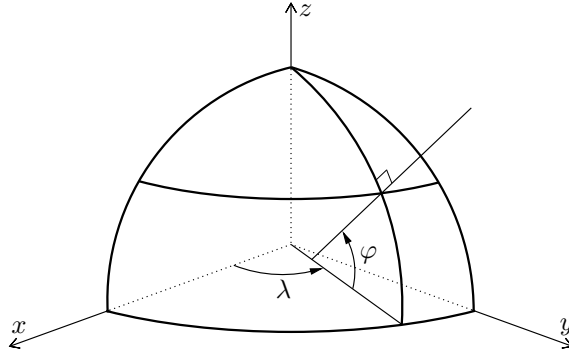


Fig. 1.2. Coordenadas geodésicas en el elipsoide.

Por medio de la transformación

$$q = \int \rho r^{-1} d\varphi, \quad (1.5)$$

el elemento de arco del elipsoide adopta la forma

$$ds^2 = r^2 (d\lambda^2 + dq^2). \quad (1.6)$$

Las nuevas coordenadas (λ, q) son isométricas y la variable $q = q(\varphi)$ se denomina *latitud isométrica*. Con la condición $q(0) = 0$ se obtiene [Lambert, 1772, § 117]

$$q = \log \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right]. \quad (1.7)$$

Sean $X = X(u, v)$ e $Y = Y(u, v)$ las ecuaciones de una proyección conforme sobre $U \subset \Sigma$ y supongamos que X e Y son funciones de clase C^1 .

Consideremos en $\mathbf{x} \in U$, cuyas coordenadas designamos por (u_x, v_x) , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} dX = X_u du + X_v dv \\ dY = Y_u du + Y_v dv, \end{cases}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (u_x, v_x) . Este sistema es fundamental en el estudio de las proyecciones conformes, pero para su tratamiento riguroso necesitamos introducir el concepto de aplicación diferencial de una proyección.

1.2. Aplicación diferencial de una proyección

Sea $T_x(\Sigma)$ el plano tangente a Σ en \mathbf{x} , es decir, el subespacio generado por los vectores tangentes en \mathbf{x} a las curvas coordenadas:

$$T_x(\Sigma) = \{a \mathbf{x}_u(u_x, v_x) + b \mathbf{x}_v(u_x, v_x) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Este subespacio coincide con el de los vectores tangentes a las curvas que pasan por \mathbf{x} . En efecto, sea $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ con $u(0) = u_x$ y $v(0) = v_x$. Entonces

$$\alpha'(0) = u'(0) \mathbf{x}_u(u_x, v_x) + v'(0) \mathbf{x}_v(u_x, v_x). \quad (1.8)$$

Recíprocamente, cualquier vector de $T_x(\Sigma)$ se puede expresar en la forma (1.8) si se eligen las funciones $u(t)$ y $v(t)$ de modo que $u'(0) = a$, $v'(0) = b$, $u(0) = u_x$ y $v(0) = v_x$; por ejemplo: $u = at + u_x$ y $v = bt + v_x$.

La *aplicación diferencial* de p en \mathbf{x} , que designamos por dp_x , es una aplicación lineal

$$dp_x : T_x(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definida como sigue [Do Carmo, 1992, § 2.4]. Sean un vector $\mathbf{v} \in T_x(\Sigma)$ y una curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Sea la curva $\beta(t) = p(\alpha(t))$, entonces definimos $dp_x(\mathbf{v}) = \beta'(0)$.

Si las ecuaciones de la curva $\beta(t)$ son

$$\begin{cases} X = X(u(t), v(t)) \\ Y = Y(u(t), v(t)), \end{cases}$$

se tiene que

$$dp_x(\mathbf{v}) = \beta'(0) = \begin{bmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

donde la matriz de las derivadas parciales está evaluada en (u_x, v_x) . La ecuación (1.9) muestra que dp_x es una aplicación lineal y está bien definida,

en el sentido de que $dp_x(\mathbf{v})$ no depende de la curva $\alpha(t)$ sino solo de las coordenadas del vector \mathbf{v} : $u'(0)$ y $v'(0)$, en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, pues \mathbf{v} se expresa según la ecuación (1.8).

Para el propósito que nos ocupa —caracterizar las proyecciones conformes— interesa considerar dp_x como una aplicación del plano euclidiano \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Para ello introducimos en $T_x(\Sigma)$ la base ortonormal

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\},$$

que se identifica con la base canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 . En este caso, si $\mathbf{v} \in T_x(\Sigma)$,

$$\mathbf{v} = \sqrt{E} u'(0) \mathbf{u}_1 + \sqrt{G} v'(0) \mathbf{u}_2$$

y la matriz A_x de la aplicación diferencial dp_x se expresa así:

$$A_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} X_u & \frac{1}{\sqrt{G}} X_v \\ \frac{1}{\sqrt{E}} Y_u & \frac{1}{\sqrt{G}} Y_v \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$

confróntese con la matriz de la ecuación (1.9). En adelante escribimos A cuando no haya lugar a confusión.

En particular, si consideramos la parametrización $(u, v) = (\lambda, \varphi)$, con $\varphi \neq \pm\pi/2$, cuyo elemento de arco está expresado por (1.1), entonces

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} X_\lambda & \frac{1}{\rho} X_\varphi \\ \frac{1}{r} Y_\lambda & \frac{1}{\rho} Y_\varphi \end{bmatrix},$$

que en la esfera unidad se convierte en

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \varphi} X_\lambda & X_\varphi \\ \frac{1}{\cos \varphi} Y_\lambda & Y_\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Obtengamos la matriz (1.11) en dos proyecciones concretas.

1. Proyección plate carrée. Las ecuaciones son [Snyder y Voxland, 1989, p. 219]:

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Y = \varphi, \end{cases} \quad (1.12)$$

que justifican la denominación *plate carrée* (plano cuadrado). Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} \sec \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La figura 1.3 muestra el mapamundi de esta proyección. ■

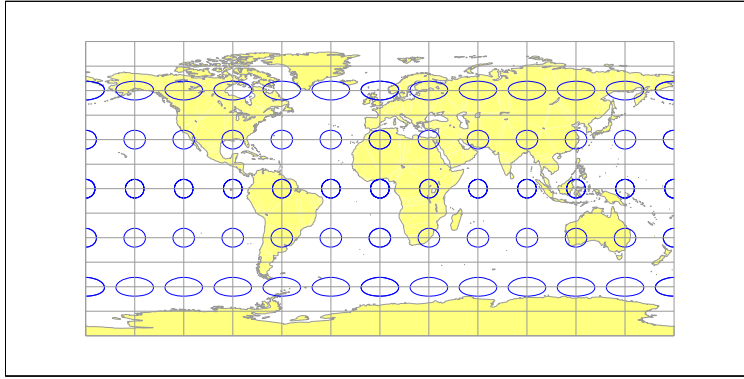


Fig. 1.3. Proyección plate carrée que muestra, además, la imagen de círculos geodésicos.

2. Proyección de Mercator. Sus ecuaciones son [Snyder y Voxland, 1989, p. 218]:

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Y = q, \end{cases} \quad (1.13)$$

donde $q = q(\varphi)$ es tal que $dq/d\varphi = \rho/r$, en virtud de (1.5). En una esfera de radio cualquiera se tiene $dq/d\varphi = \sec \varphi$, luego

$$A = \sec \varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El mapa de esta proyección se muestra en la figura 1.4. ■

1.3. Teorema fundamental de las proyecciones conformes

Es claro que una proyección p es conforme si y solo si dp_x conserva los ángulos orientados en todo punto del dominio de definición de p , pues el ángulo entre dos curvas que se cortan es, por definición, el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto de corte. Además, el rango de A es 2 porque dp_x es inyectiva. Esto da lugar al siguiente resultado.

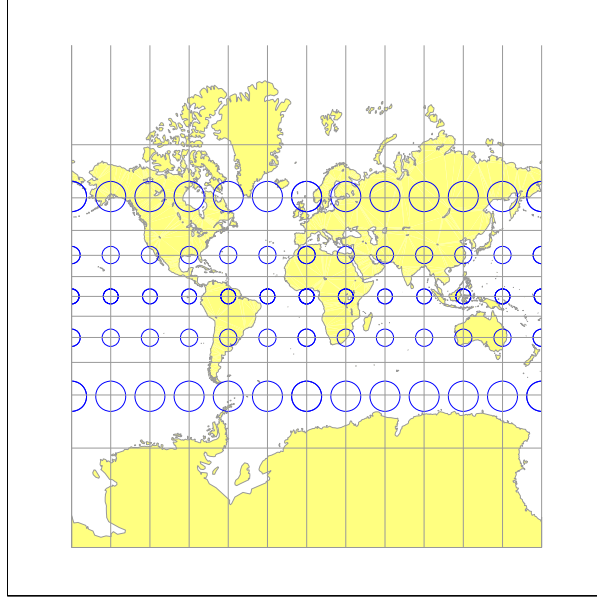


Fig. 1.4. Proyección de Mercator y la imagen de círculos geodésicos.

Teorema fundamental de las proyecciones conformes. *Una proyección $p : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ es conforme si y solo si para todo $\mathbf{x} \in U$ la aplicación $dp_{\mathbf{x}}$ es una semejanza directa, es decir,*

$$|A\mathbf{v}| = \sigma|\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2,$$

con $\sigma = \sigma(\mathbf{x}) > 0$ y $\det A > 0$.

Demostración. Supongamos que p es conforme. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canónica de \mathbb{R}^2 . Como $\langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle = 0$, entonces $\langle A(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \rangle = 0$. De aquí se deduce que $|A\mathbf{e}_1| = |A\mathbf{e}_2|$. Sea $\sigma = |A\mathbf{e}_1|$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, que expresamos como $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$. Se tiene que

$$|A\mathbf{v}|^2 = \sigma^2(v_1^2 + v_2^2),$$

luego $|A\mathbf{v}| = \sigma|\mathbf{v}|$. Esto prueba que A es una semejanza, necesariamente directa pues la proyección, al ser conforme, conserva el sentido de los ángulos.

Recíprocamente sea $\mathbf{x} \in U$. Supongamos que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \sigma^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, con $\det A > 0$ y $\sigma > 0$. De aquí se obtiene

$$\mathbf{v}^T (A^T A - \sigma^2 I) \mathbf{v} = 0,$$

y por consiguiente $A^T A = \sigma^2 I$. Esto equivale a

$$(\sigma^{-1}A)^T (\sigma^{-1}A) = I,$$

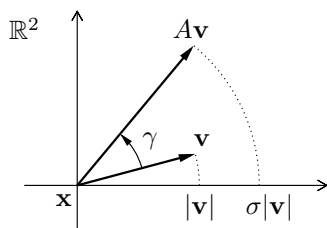


Fig. 1.5. La aplicación diferencial de una proyección conforme transforma el vector \mathbf{v} en el vector $A\mathbf{v}$.

es decir, $\sigma^{-1}A$ es igual a una matriz ortogonal, R , cuyo determinante necesariamente es $+1$. Por tanto A es producto de un giro, R , y una homotecia de razón σ :

$$A = \sigma R.$$

Finalmente demostramos que, en todo $\mathbf{x} \in U$, cualquiera que sea el par de vectores de \mathbb{R}^2 , el ángulo orientado entre $dp_x(\mathbf{v})$ y $dp_x(\mathbf{w})$ coincide con el ángulo orientado entre \mathbf{v} y \mathbf{w} . Sea θ el ángulo que forman \mathbf{v} y \mathbf{w} . Se tiene

$$\frac{\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle}{|A\mathbf{v}||A\mathbf{w}|} = \frac{\langle \mathbf{v}, A^T A\mathbf{w} \rangle}{\sigma^2 |\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \cos \theta,$$

luego θ es también el ángulo que forman $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$. ■

La demostración ha revelado que una proyección es conforme si y solo si existen $\sigma = \sigma(\mathbf{x}) > 0$ y $\gamma = \gamma(\mathbf{x}) \in [-\pi, \pi)$ tales que

$$A = \sigma R(\gamma) = \sigma \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

La función σ se denomina *escala infinitesimal* y γ es el ángulo de giro, como muestra la figura 1.5. Esto conduce al siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Una proyección: $X = X(u, v)$, $Y = Y(u, v)$, es conforme si y solo si $X_u^2 + Y_u^2 \neq 0$ en todo punto y además se cumplen las condiciones*

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E}}X_u = \frac{1}{\sqrt{G}}Y_v \\ \frac{1}{\sqrt{E}}Y_u = -\frac{1}{\sqrt{G}}X_v. \end{cases} \quad (1.15)$$

Demostración. La matriz A de la aplicación diferencial está dada por (1.10). Si la proyección es conforme entonces A se expresa en la forma (1.14). Esto

implica las condiciones (1.15). En tal caso $\det A = (X_u^2 + Y_u^2)/E$, pero en virtud de (1.14) $\det A = \sigma^2$, luego $X_u^2 + Y_u^2 \neq 0$.

Recíprocamente, si la matriz (1.10) cumple que

$$A = \frac{1}{\sqrt{E}} \begin{bmatrix} X_u & -Y_u \\ Y_u & X_u \end{bmatrix},$$

con $\det A = (X_u^2 + Y_u^2)/E > 0$, entonces A es una semejanza directa. Por tanto la proyección es conforme. ■

Algunos autores denominan *condiciones de Korn-Lichtenstein* al sistema (1.15) —véase [Grafarend y Syffus, 1998, p. 284, ec. (2)]—. Esta caracterización es muy útil para comprobar si una proyección es conforme. Veamos cuatro ejemplos con la parametrización $(u, v) = (\lambda, \varphi)$, $\varphi \neq \pm\pi/2$, de la esfera unidad. La matriz de la aplicación diferencial está expresada en (1.11).

1. Proyección plate carrée. A partir de las ecuaciones (1.12) se tiene que $X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 = 1$, pero no se cumple la primera de las condiciones (1.15). Por tanto la proyección plate carrée no es conforme. En la sección anterior obtuvimos que

$$A = \begin{bmatrix} \sec \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz no es una semejanza, excepto en el ecuador donde es la matriz identidad. Véase la figura 1.3. ■

2. Proyección de Mercator. Según las ecuaciones (1.13) se tiene que $X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 = 1$, y se comprueba que se satisfacen las condiciones (1.15). Por tanto la proyección de Mercator es conforme. En la sección anterior obtuvimos que

$$A = \sec \varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que sí es una semejanza, con $\sigma = \sec \varphi$ y $\gamma = 0$. Véase la figura 1.4. ■

3. Proyección sinusoidal. Sus ecuaciones son [Snyder y Voxland, 1989, p. 220]:

$$\begin{cases} X = \lambda \cos \varphi \\ Y = \varphi. \end{cases}$$

Aunque $X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 = \cos^2 \varphi \neq 0$ para todo φ , no se cumple la segunda de las condiciones (1.15) y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \sin \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto la proyección sinusoidal no es conforme, es decir, A no es una semejanza, pero sí conserva los ángulos en el meridiano $\lambda = 0$ y en el ecuador —en ambos casos A es la matriz identidad—. Véase la figura 1.6. ■

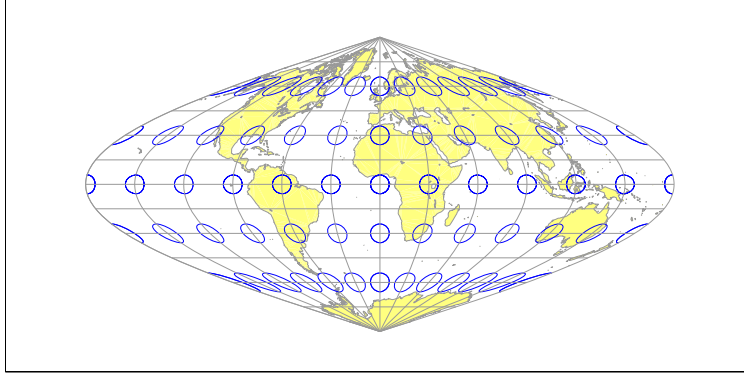


Fig. 1.6. Proyección sinusoidal que muestra, además, la imagen de círculos geodésicos.

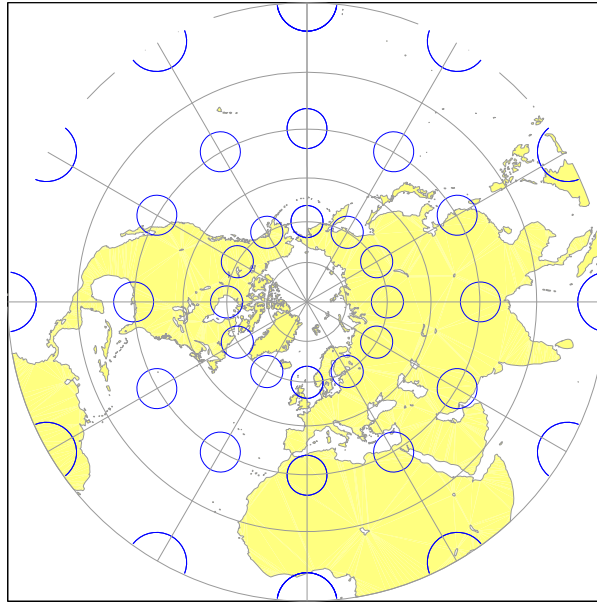


Fig. 1.7. Proyección estereográfica polar y la imagen de círculos geodésicos. Hemisferio norte.

4. Proyección estereográfica (aspecto polar). Sea $\theta = \pi/2 - \varphi$ la *colatitud*. Las ecuaciones de esta proyección son [Snyder y Voxland, 1989, p. 226]:

$$\begin{cases} X = 2 \operatorname{tg}(\theta/2) \operatorname{sen} \lambda \\ Y = -2 \operatorname{tg}(\theta/2) \cos \lambda, \end{cases}$$

Se tiene que $X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 = 4 \operatorname{tg}^2(\theta/2) \neq 0$ para todo $\theta \in (0, \pi)$, y se comprueba que se cumplen las condiciones (1.15). Esto demuestra que la estereográfica es una proyección conforme. Además

$$A = \sec^2(\theta/2) \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix},$$

que es una semejanza con

$$\sigma = \sec^2(\theta/2) = 1 + e^{-2q} \quad \text{y} \quad \gamma = \lambda, \quad (1.16)$$

pues $\exp(-q) = \operatorname{tg}(\theta/2)$. Véase la figura 1.7. ■

Si la parametrización (u, v) es isométrica: $E = G = h^2$, las condiciones (1.15) se transforman en

$$\begin{cases} X_u = Y_v \\ Y_u = -X_v, \end{cases}$$

las mismas que debe cumplir la función compleja $f(u+iv) = X(u,v) + iY(u,v)$ para que sea analítica, pues X e Y son funciones de clase C^1 por hipótesis. En teoría de funciones complejas se llaman *condiciones de Cauchy-Riemann* o de *D'Alembert-Euler*, y las funciones X e Y se denominan *armónicas conjugadas*. Una función $f(z)$ es analítica si tiene derivada en cada punto del dominio de definición [Markushevich, 1970, p. 79], que es igual a

$$f'(z) = X_u + iY_u = Y_v - iX_v = -i(X_v + iY_v). \quad (1.17)$$

Por otra parte, la matriz jacobiana de la función vectorial: $X = X(u, v)$, $Y = Y(u, v)$, es

$$J = \begin{bmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{bmatrix} = \sqrt{X_u^2 + Y_u^2} \begin{bmatrix} \frac{X_u}{\sqrt{X_u^2 + Y_u^2}} & \frac{X_v}{\sqrt{X_u^2 + Y_u^2}} \\ \frac{Y_u}{\sqrt{X_u^2 + Y_u^2}} & \frac{Y_v}{\sqrt{X_u^2 + Y_u^2}} \end{bmatrix},$$

que expresamos así:

$$J(f) = |f'(z)| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = |f'(z)| R(\theta),$$

donde θ es un *argumento* de $f'(z)$, es decir, $\operatorname{tg} \theta = Y_u/X_u$. Entonces $J(f)$ es una semejanza directa en aquellos puntos donde $f'(z) \neq 0$.

Observación. El argumento de un número complejo z está determinado excepto un múltiplo de 2π . Utilizamos el símbolo $\arg z$ para indicar *cualquiera* de ellos [Silverman,

1975, § 1.3]. Por ejemplo, los argumentos de $1 + i$ son $\pi/4 + 2n\pi$, con n entero. Cuando sea conveniente, utilizaremos el símbolo $\text{Arg } z$ para representar el único valor de $\arg z$ tal que $-\pi \leq \arg z < \pi$, denominado *valor principal*. Para ilustrarlo: $\text{Arg}(1 + i) = \pi/4$.

Una función analítica $f(z)$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ conserva los ángulos en z_0 . En efecto, sea la curva $\alpha(s)$, parametrizada según la longitud de arco s , con $\alpha(0) = z_0$, y sea φ el ángulo entre el eje real y la recta tangente en z_0 —figura 1.8—. Si consideramos la curva $\beta(s) = f(\alpha(s))$, entonces

$$\beta'(0) = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)} \alpha'(0).$$

Es decir, en cada punto donde $f'(z) \neq 0$, el vector tangente a una curva se somete a un giro según $\arg f'$ y a una homotecia según $|f'|$:

$$\frac{d\beta}{ds} = |f'| e^{i(\varphi + \arg f')}. \quad (1.18)$$

Necesariamente los ángulos se conservan en z_0 pues son diferencia de direcciones.

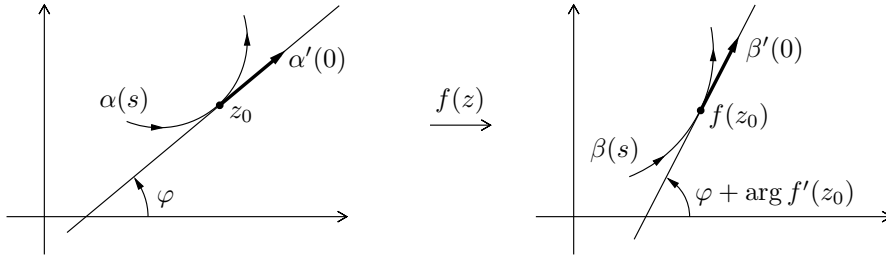


Fig. 1.8. Cambio de la dirección tangente a una curva en z_0 mediante una función analítica tal que $f'(z_0) \neq 0$.

Teorema 1.2. Sea (u, v) una parametrización isométrica del elipsoide de revolución. Una proyección: $X = X(u, v)$, $Y = Y(u, v)$, es conforme si y solo si $f(z) = X(u, v) + iY(u, v)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$.

Demostración. En virtud del teorema 1.1 y de que la parametrización es isométrica, si la proyección es conforme entonces X e Y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. Como estas funciones son de clase C^1 , se deduce que f es analítica. Además $X_u^2 + Y_u^2 \neq 0$, luego $f'(z) \neq 0$.

Recíprocamente sea $ds^2 = h^2(du^2 + dv^2)$ el elemento de arco del elipsoide. Entonces la matriz (1.10) es

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{bmatrix} = \frac{1}{h} J(f) = \frac{|f'(z)|}{h} R(\theta).$$

Esto prueba que A es una semejanza directa con

$$\sigma = \frac{|f'(z)|}{h} \quad \text{y} \quad \gamma = \theta. \quad (1.19)$$

Por tanto la proyección es conforme. ■

Las funciones analíticas con la propiedad de este teorema, $f'(z) \neq 0$, se llaman *transformaciones conformes*.

Observación. Una transformación conforme $f(z)$ introduce una nueva parametrización isométrica del elipsoide. En efecto, $df = f'(z)dz$ y $ds^2 = h^2|dz|^2$, por tanto

$$ds^2 = \frac{h^2}{|f'(z)|^2} (dX^2 + dY^2).$$

En adelante utilizamos la parametrización isométrica $(u, v) = (\lambda, q)$ cuyo elemento de arco es $ds^2 = r^2 (d\lambda^2 + dq^2)$. Por tanto una proyección conforme: $X = X(\lambda, q)$, $Y = Y(\lambda, q)$, lleva asociada una transformación conforme $f(z)$, es decir:

$$\begin{cases} z = \lambda + iq \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}, \\ f(z) = X + iY \quad \text{analítica}, \\ f'(z) = r\sigma (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma) \neq 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

El ángulo

$$\gamma = \operatorname{Arg} f'(z) \in [-\pi, \pi)$$

se denomina *convergencia de meridianos* y es el que forman el eje Y y la tangente a la curva que representa el meridiano —véase la figura 1.9—.

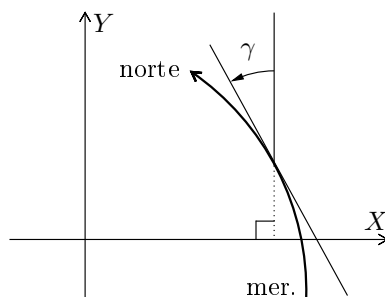


Fig. 1.9. Convergencia de meridianos.

En cartografía ocupan un lugar destacado dos transformaciones conformes: la *función exponencial* y las *transformaciones racionales lineales*. Proyecciones conformes básicas como las cilíndricas, las estereográficas y las cónicas de Lambert están gobernadas por ellas. Por esta razón y porque también

están presentes en las proyecciones de Lagrange, recordamos sus principales propiedades —véase por ejemplo [Markushevich, 1970, Capítulo 2, §§ 3 y 4]—.

1.4. Función exponencial

Sea $z = u + iv$. La función definida por

$$\exp z = e^z = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v)$$

se llama función exponencial de variable compleja. Se tiene que

$$|e^z| = e^u \quad \text{y} \quad \arg e^z = v + 2n\pi,$$

con n entero, luego $\exp z \neq 0$ para todo z . La función exponencial no es inyectiva. Es periódica con periodo $2\pi i$, es decir,

$$e^{z+2n\pi i} = e^z, \quad n \text{ entero.}$$

Además, es una transformación conforme porque

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

En la transformación del plano z mediante $w = \exp z$, el segmento $u = u_0$, $-\pi \leq v < \pi$, se transforma de manera biyectiva en la circunferencia centrada en el origen y con radio $\exp u_0$, como muestra la figura 1.10. La banda $\operatorname{Re} z > 0$, $-\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi$, se corresponde con el exterior del círculo unidad del plano w , mientras que la banda $\operatorname{Re} z < 0$, $-\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi$, se transforma en el interior de dicho círculo, excluido el origen.

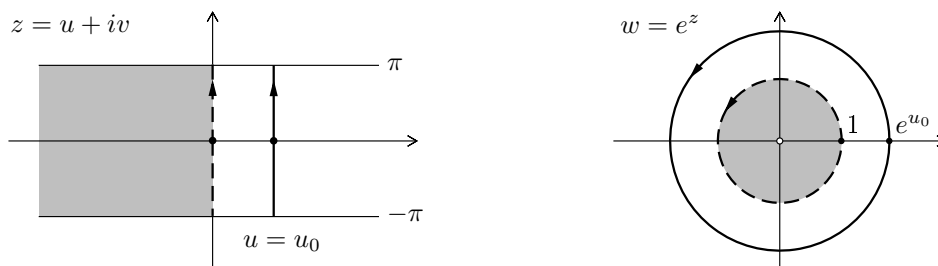


Fig. 1.10. Todos los segmentos $u = u_0$, $-\pi \leq v < \pi$, se transforman en circunferencias centradas en el origen.

Si consideramos ahora la recta $v = v_0$, con $-\pi \leq v_0 < \pi$, tenemos que se transforma de manera biyectiva en la semirrecta $\operatorname{Arg} w = v_0$. La banda

$0 < \operatorname{Im} z < \pi$ se transforma en el semiplano superior, mientras que la banda $-\pi < \operatorname{Im} z < 0$ se corresponde con el semiplano inferior —figura 1.11—. Por tanto la banda $-\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi$ se trasforma de manera biyectiva en el plano w perforado, es decir, el plano menos el origen.

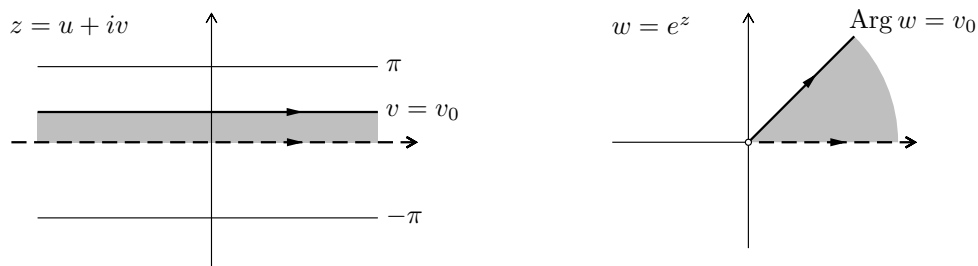


Fig. 1.11. Todas las rectas $v = v_0$, con $-\pi \leq v_0 < \pi$, se transforman en semirrectas que concurren en el origen.

Observación. Un conjunto abierto y conexo del plano complejo se llama *dominio*. Una *región* es un dominio junto con alguno, ninguno o todos los puntos de su frontera [Silverman, 1975, § 2.1].

En cartografía se trabaja con la región

$$D = \{\lambda + iq : -\pi \leq \lambda < \pi\}$$

A partir de lo expuesto en el párrafo anterior, se deduce que la función exponencial no es biyectiva en D , pero observamos que si $z = \lambda + iq$, entonces $-\pi \leq \operatorname{Im}(iz) < \pi$. Esto implica que la función $\exp(iz)$ transforma de manera biyectiva la banda D en el plano perforado, como muestra la figura 1.12. Además,

$$|e^{iz}| = e^{-q} \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} e^{iz} = \lambda,$$

luego la recta λ constante (meridiano) se transforma en una semirrecta que concurre en el origen, y el segmento q constante, $-\pi \leq \lambda < \pi$, (paralelo) en una circunferencia centrada en el origen.

Es natural, por tanto, que la función $\exp(iz)$, $z = \lambda + iq$, esté presente en cartografía. Los dos próximos ejemplos lo ponen de manifiesto.

1. Proyección estereográfica (aspecto polar). En la esfera (radio R) sus ecuaciones son [Snyder y Voxland, 1989, p. 226]:

$$\begin{cases} X = 2R \operatorname{tg}(\theta/2) \operatorname{sen} \lambda \\ Y = -2R \operatorname{tg}(\theta/2) \cos \lambda, \end{cases}$$

donde $\theta = \pi/2 - \varphi$ es la colatitud. Como $e^{-q} = \operatorname{tg}(\theta/2)$, entonces

$$\begin{cases} X = 2Re^{-q} \operatorname{sen} \lambda \\ Y = -2Re^{-q} \cos \lambda, \end{cases}$$

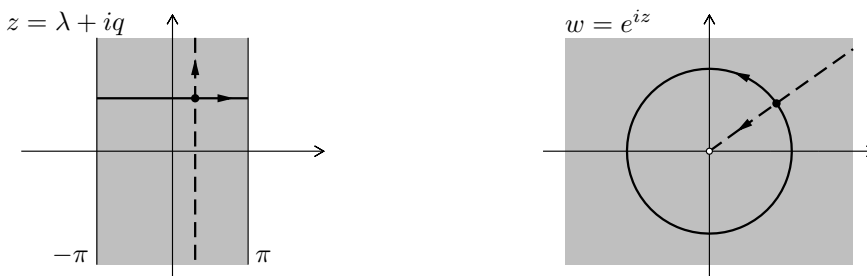


Fig. 1.12. En cartografía la transformación conforme apropiada es $\exp(iz)$.

y la transformación conforme asociada, $f(z) = X + iY$, es

$$f(z) = -2Re^{iz}. \quad (1.21)$$

Además, $f'(z) = 2Re^{-q}e^{i\lambda}$, que proporciona, en virtud de (1.20), la escala infinitesimal y la convergencia de meridianos:

$$r\sigma = 2Re^{-q}, \quad \gamma = \lambda.$$

Aunque $\exp(iz) \neq 0$ para todo z , obsérvese que

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} |e^{iz}| = \lim_{q \rightarrow +\infty} e^{-q} = 0.$$

Por ello en la proyección estereográfica polar —véase la figura 1.7— el origen de coordenadas es la imagen del polo norte. ■

2. Proyección cónica conforme de Lambert. Lo que hoy se conoce como *proyecciones cónicas conformes* (en adelante las denominamos así) fueron creadas por Lambert [1772, §§ 47-57] al modificar la convergencia de meridianos de la estereográfica polar. Sustituyó $\gamma = \lambda$ por $\gamma = c\lambda$. El resultado son las ecuaciones, en coordenadas (λ, q) del elipsoide [Bugayevskiy y Snyder, 1995, p. 90]:

$$\begin{cases} X = ke^{-cq} \sin(c\lambda) \\ Y = ke^{-cq_0} - ke^{-cq} \cos(c\lambda), \end{cases}$$

donde $k > 0$, $c \neq 0$ y q_0 corresponde al paralelo cuya imagen es la circunferencia centrada en $(0, k \exp(-cq_0))$ que es tangente al eje X en el origen. Se comprueba que la transformación conforme asociada es

$$f(z) = ki(e^{-cq_0} - e^{ciz}). \quad (1.22)$$

Además, $f'(z) = kce^{-cq}e^{ic\lambda}$, luego, en virtud de (1.20),

$$r\sigma = k|c|e^{-cq} \quad \text{y} \quad \gamma = c\lambda. \quad (1.23)$$

Véase la figura 1.13. ■

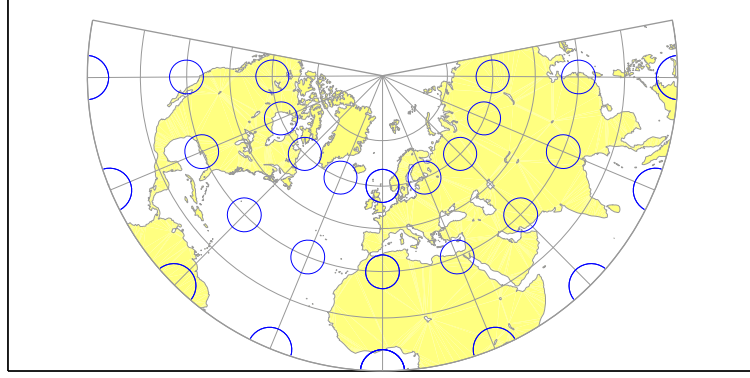


Fig. 1.13. Proyección cónica conforme y la imagen de círculos geodésicos. Hemisferio norte.

1.5. Transformaciones racionales lineales

Exponemos algunas propiedades básicas; otras se irán incluyendo cuando se necesiten —consúltese por ejemplo [Silverman, 1975, §§ 3.2 y 11.1]—. Las transformaciones racionales lineales están definidas por la función de variable compleja

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.24)$$

donde a, b, c y d son constantes complejas, y al menos c o d es distinto de cero. Reciben otras denominaciones: transformaciones *de Möbius*, *homográficas* o *bilineales*.

Si $c = 0$ entonces

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad d \neq 0,$$

que es una *función lineal* y *entera* (analítica en todo el plano). Es una transformación conforme si $a \neq 0$, y está compuesta por un giro, una homotecia y una traslación. Por tanto representa una semejanza directa del plano z .

Si $c \neq 0$ entonces, para todo $z \neq -d/c$, existe la derivada:

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Cuando $ad - bc = 0$, entonces $T(z)$ es una función constante que transforma el plano complejo *ampliado* (plano ordinario más el punto del infinito) en el punto a/c . Como esta función no ofrece ningún interés, en adelante supondremos que $ad - bc \neq 0$.

Una transformación racional lineal es una función continua y biyectiva del plano ampliado sobre sí mismo tal que $T(-d/c) = \infty$ y $T(\infty) = a/c$. También es una transformación conforme del plano ampliado sobre sí mismo. Las únicas funciones analíticas y biyectivas del plano ampliado en sí mismo son las transformaciones racionales lineales.

Poseen la *propiedad circular*: la imagen de una recta o una circunferencia es una recta o una circunferencia. En las funciones lineales, $c = 0$, las rectas y circunferencias se transforman en rectas y circunferencias respectivamente.

Las transformaciones racionales lineales son básicas en cartografía como muestran los dos siguientes ejemplos: proyección cilíndrica conforme y proyección estereográfica.

Proyección cilíndrica conforme. Sus ecuaciones en coordenadas (λ, q) son [Bugayevskiy y Snyder, 1995, p. 49]:

$$\begin{cases} X = c\lambda \\ Y = cq, \end{cases}$$

donde $c > 0$. Véase la figura 1.4. La transformación conforme asociada es la función lineal

$$f(z) = cz,$$

luego

$$r\sigma = c \quad \text{y} \quad \gamma = 0, \quad (1.25)$$

en virtud de (1.20). ■

Proyección estereográfica

Sean la parametrización (λ, q) de la esfera de radio R y $x_0 = (\lambda_0, q_0)$ un punto de ella. Desde el otro extremo del diámetro de la esfera que determina x_0 se proyecta la esfera en el plano tangente a ella en x_0 . Esta es la proyección estereográfica centrada en x_0 .

Introducimos nuevas coordenadas isométricas (λ', q') de modo que el polo norte es el punto x_0 y el meridiano origen de longitudes es la geodésica que une x_0 con el polo sur geográfico P_s , como muestra la figura 1.14. Sean ψ , ψ_0 y ψ' las distancias esféricas entre, respectivamente: un punto x y el polo

norte geográfico P_n , x_0 y P_n , y x y x_0 . Se tiene que

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = e^{-q}, \quad \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} = e^{-q_0} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \frac{\psi'}{2} = e^{-q'}. \quad (1.26)$$

La siguiente tabla resume los dos sistemas de coordenadas definidos.

Coord. isométricas	Distancia	Respecto a
$x_0 = (\lambda_0, q_0)$	ψ_0	P_n
$x = (\lambda, q)$	ψ	
$x = (\lambda', q')$	ψ'	x_0

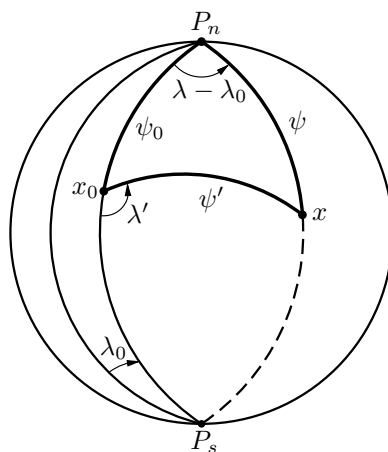


Fig. 1.14. Dos sistemas de coordenadas isométricas en la esfera: (λ, q) y (λ', q') . Véase la tabla adjunta.

En la parametrización $z' = \lambda' + iq'$, la proyección estereográfica centrada en x_0 está asociada con la transformación conforme

$$f(z') = -2Rie^{iz'} \quad (1.27)$$

en virtud de (1.21). Queremos expresar $f(z')$ en función de $z = \lambda + iq$, para ello utilizamos el siguiente resultado.

Teorema 1.3. Sean $z = \lambda + iq$ coordenadas isométricas respecto al polo norte geográfico en la esfera de radio R y $z_0 = \lambda_0 + iq_0$ que está asociado con un punto cualquiera x_0 de dicha esfera. Sea $z' = \lambda' + iq'$ coordenadas isométricas respecto a x_0 como polo norte y origen de longitudes la geodésica que une x_0 con el polo sur geográfico. Ambos sistemas, z y z' , están relacionados por las fórmulas

$$e^{iz} = e^{iz_0} \frac{e^{-q_0} + e^{iz'}}{e^{q_0} - e^{iz'}} \quad \text{y} \quad e^{iz'} = e^{q_0} \frac{e^{iz} - e^{iz_0}}{e^{iz} + e^{iz_0}}. \quad (1.28)$$

Demostración. En el sistema z' , las ecuaciones de la proyección estereográfica centrada en x_0 son, según (1.27):

$$\begin{cases} X_1 = 2Re^{-q'} \operatorname{sen} \lambda' \\ Y_1 = -2Re^{-q'} \cos \lambda'. \end{cases}$$

En el sistema z , las ecuaciones de la estereográfica centrada en el polo norte geográfico son:

$$\begin{cases} X_2 = 2Re^{-q} \operatorname{sen}(\lambda - \lambda_0) \\ Y_2 = -2Re^{-q} \cos(\lambda - \lambda_0), \end{cases}$$

suponemos que λ_0 es el origen de longitudes. Consideremos los planos complejos:

$$\zeta = X_1 + iY_1 = -2Rie^{iz'} \quad \text{y} \quad w = X_2 + iY_2 = -2Rie^{i(z-\lambda_0)}, \quad (1.29)$$

y sea x un punto de la esfera distinto de x_0 . Con ayuda de las ecuaciones (1.26) y la figura 1.14, se pueden ubicar en los planos ζ y w los puntos: x , x_0 y los polos geográficos, P_n y P_s , como muestra la figura 1.15. Obsérvese que P_s se transforma en el punto del infinito del plano w ampliado.

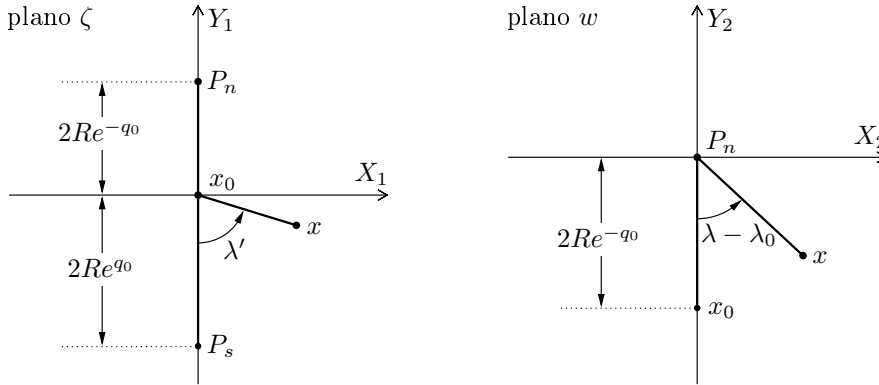


Fig. 1.15. Izquierda: estereográfica centrada en x_0 y meridiano origen $\lambda' = 0$. Derecha: estereográfica centrada en el polo norte y meridiano origen $\lambda = \lambda_0$.

La estereográfica tiene la propiedad de proyectar círculos en rectas y círculos, y las transformaciones racionales lineales son las únicas transformaciones conformes biyectivas del plano ampliado en sí mismo con la propiedad circular. Por tanto ζ y w deben estar relacionadas por una expresión de la forma

$$w = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}.$$

Para hallarla tenemos en cuenta que una transformación racional lineal conserva la *razón doble* de cuatro puntos cualesquiera [Levinson y Redheffer, 1990, p. 264], definida por

$$X(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_4} \frac{w_3 - w_4}{w_3 - w_2}. \quad (1.30)$$

Es decir, se cumple $X(w, w_1, w_2, w_3) = X(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, donde ζ se transforma en w y los ζ_i en los respectivos w_i según la siguiente tabla — véase la figura 1.15—:

$$\begin{aligned} P_n : \quad \zeta_1 = 2Re^{-q_0}i &\longmapsto w_1 = 0 \\ x_0 : \quad \zeta_2 = 0 &\longmapsto w_2 = -2Re^{-q_0}i \\ P_s : \quad \zeta_3 = -2Re^{q_0}i &\longmapsto w_3 = \infty. \end{aligned}$$

En virtud de (1.30) se obtiene la ecuación

$$w = 2Re^{q_0}i \frac{\zeta - 2Re^{-q_0}i}{\zeta + 2Re^{q_0}i}.$$

Ahora sustituimos ζ y w por (1.29) y después despejamos $\exp(iz)$ y $\exp(iz')$ para llegar a las fórmulas (1.28) que queríamos encontrar. ■

La fórmula de $\exp(iz')$ en (1.28) se sustituye en (1.27). De este modo obtenemos la transformación conforme, en coordenadas $z = \lambda + iq$, de la estereográfica centrada en $x_0 = (\lambda_0, q_0)$:

$$f(z) = -2Re^{q_0}i \frac{e^{iz} - e^{iz_0}}{e^{iz} + e^{iz_0}}. \quad (1.31)$$

El plano $f(z)$ se corresponde con el plano ζ de la figura 1.15. Observamos que $f(z_0) = 0$, es decir, el origen de coordenadas es la imagen de x_0 . Pero en la esfera hay un punto, al que llamamos $\overline{x_0} = (\lambda_0, -q_0)$, situado en el mismo meridiano que x_0 y con latitud opuesta, cuyo paralelo se transforma en una recta perpendicular a la imagen del meridiano λ_0 , como muestra la figura 1.16.

Hagamos que la imagen de $\overline{x_0}$ sea el nuevo origen de coordenadas y que las imágenes de su meridiano y su paralelo sean los ejes de ordenadas y abscisas, respectivamente. Para ello calculamos $f(\overline{z_0}) = -2Ri \sinh q_0$ en (1.31). Este valor indica que la imagen de $\overline{x_0}$ equidista de las de los polos, P_n y P_s , véase la figura 1.16. Ahora definimos la función $E(z) = f(z) - f(\overline{z_0})$, que tiene la propiedad buscada. Después de simplificar se obtiene

$$E(z) = -2Ri \cosh q_0 \frac{e^{i(z-\overline{z_0})} - 1}{e^{i(z-\overline{z_0})} + 1} = 2R \cosh q_0 \operatorname{tg} \frac{z - \overline{z_0}}{2}, \quad (1.32)$$

donde $\overline{z_0} = \lambda_0 - iq_0$. Esta es la transformación conforme asociada con la estereográfica centrada en (λ_0, q_0) tal que $E(\overline{z_0}) = 0$. Vemos que está gobernada por una transformación racional lineal de la variable $\exp(iz)$. La *estereográfica ecuatorial* se corresponde con $q_0 = 0$:

$$E(z) = 2R \operatorname{tg} \frac{z - \lambda_0}{2}, \quad (1.33)$$

mostrada en la figura 1.17 con $\lambda_0 = 0$.

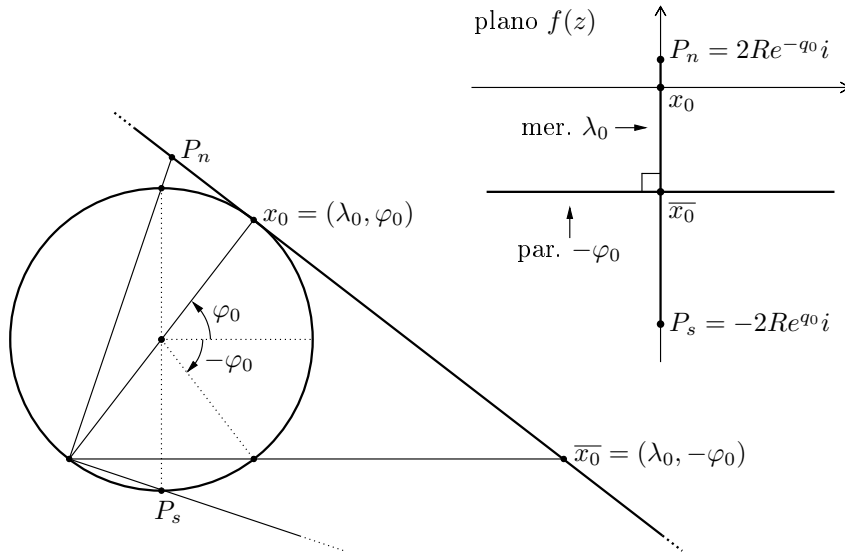


Fig. 1.16. Proyección estereográfica centrada en (λ_0, φ_0) . El meridiano λ_0 se transforma en un segmento rectilíneo perpendicular a la imagen del paralelo $-\varphi_0$ que también es una recta y divide dicho segmento en dos partes iguales.

Observación. Para obtener la función tangente en (1.32) hemos utilizado las fórmulas de Euler:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad (1.34)$$

que permiten definir la función $\operatorname{tg} z = \operatorname{sen} z / \cos z$, es decir,

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}. \quad (1.35)$$

Si $z = u + iv$, se tiene la identidad

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u + \cosh v} + i \frac{\sinh v}{\cos u + \cosh v}.$$

Entonces las ecuaciones de la proyección estereográfica, $E(z) = X + iY$, son

$$\begin{cases} X = 2R \cosh q_0 \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)} \\ Y = 2R \cosh q_0 \frac{\sinh(q + q_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)}. \end{cases}$$

Finalmente, para obtener la escala infinitesimal y la convergencia de meridianos tenemos en cuenta que $E'(z) = r\sigma(\cos \gamma + i \sin \gamma)$, en virtud de (1.20). La identidad $2 \cos^2 z = 1 + \cos 2z$ permite expresar

$$E'(z) = \frac{2R \cosh q_0}{1 + \cos(z - \bar{z}_0)}. \quad (1.36)$$

Para descomponer el segundo miembro en sus partes real e imaginaria utilizamos la identidad $\cos(u + iv) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v$ [Hille, 1959, § 6.4], y recordamos que $r = R \operatorname{sech} q$. Se comprueba que

$$\sigma = \frac{2 \cosh q_0 \cosh q}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)}, \quad (1.37)$$

y

$$\cos \gamma = \frac{1 + \cos(\lambda - \lambda_0) \cosh(q + q_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \sinh(q + q_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)}.$$

En particular, la escala infinitesimal en el centro de la proyección estereográfica es

$$\sigma(\lambda_0, q_0) = \frac{2 \cosh^2 q_0}{1 + \cosh 2q_0} = 1.$$

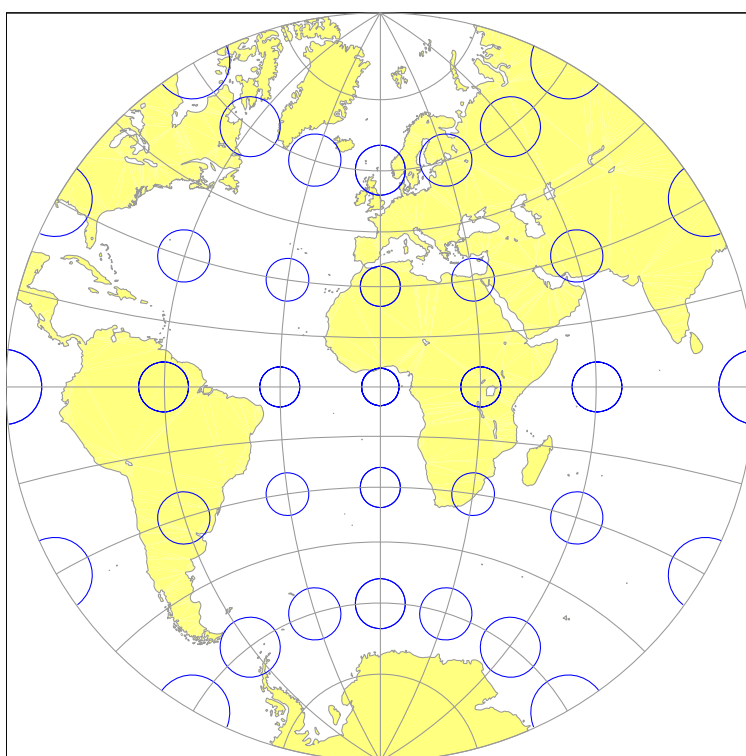


Fig. 1.17. Proyección estereográfica ecuatorial y la imagen de círculos geodésicos. Rango de longitudes: 180 grados.

Capítulo 2

Leyes de curvatura de la representación conforme

Enunciamos tres leyes. La primera describe el cambio de la curvatura mediante una transformación conforme. A partir de esta ley introducimos en cartografía el concepto de función característica de una proyección conforme y también la derivada pre-schwarziana. La segunda ley expresa el cambio de la derivada tangencial de la curvatura, y con ella introducimos en cartografía la derivada de Schwarz. La última ley establece la curvatura de las proyecciones de líneas geodésicas.

2.1. Cambio de curvatura en transformaciones conformes

La primera ley de curvatura que presentamos requiere el siguiente resultado, del que se deduce la relación que existe entre la escala infinitesimal y la convergencia de meridianos de una proyección conforme.

Proposición 2.1. *Sea $f(z)$ una transformación conforme definida en una región del plano complejo. Entonces las funciones $\log|f'(z)|$ y $\arg f'(z)$ son armónicas conjugadas.*

Observación. La función logaritmo —véase por ejemplo [Silverman, 1975, § 4.3]— se define como $\log z = \log|z| + i \arg z$, con $z \neq 0$, donde $\arg z$ está definido excepto múltiplos de 2π . Por ello es una *función multi-evaluada*: hay más de una imagen asociada con un valor complejo. Si utilizamos $\text{Arg } z \in [-\pi, \pi)$ en lugar de $\arg z$, entonces se obtiene una *rama* de $\log z$ que se llama *rama principal* y se simboliza por $\text{Log } z$. Es decir,

$$\text{Log } z = \log|z| + i \text{Arg } z.$$

Si $f(z)$ es una función analítica y es distinta de cero en un punto z , entonces puede elegirse una rama donde $\log f(z)$ es también analítica en un entorno de z [Silverman, 1975, § 5.3] y se tiene que

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Puesto que $f'(z) \neq 0$ es analítica también lo es $\log f'(z)$. Además, se tiene que $\log f'(z) = \log|f'(z)| + i \arg f'(z)$. Queda así demostrada la Proposición 2.1.

En una proyección conforme tenemos, según (1.20), que

$$\text{Log } f'(z) = \log(r\sigma) + i\gamma, \quad (2.1)$$

con $z = \lambda + iq$ y $\gamma = \text{Arg } f'(z) \in [-\pi, \pi)$. En virtud de la Proposición 2.1, las funciones $\log(r\sigma)$ y γ son armónicas conjugadas, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log(r\sigma) = \gamma_q \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial q} \log(r\sigma) = -\gamma_\lambda, \quad (2.2)$$

y, por tanto, $\Delta \log(r\sigma) = \Delta \gamma = 0$, donde Δ simboliza el laplaciano.

Proyección estereográfica polar. En la esfera unidad la escala infinitesimal y la convergencia de meridianos de esta proyección son:

$$\sigma = 1 + e^{-2q} \quad \text{y} \quad \gamma = \lambda. \quad (2.3)$$

Como el radio de los paralelos, en función de la latitud isométrica, viene dado por $r = \text{sech } q$, entonces $\log(r\sigma) = \log 2 - q$. Vemos que se cumple (2.2) y que $\log(r\sigma)$ y γ son funciones armónicas. ■

El siguiente teorema se debe a Comenetz [1938, p. 86, ec. (11)] y formula la *ley de cambio de curvatura en transformaciones conformes* (él la denomina *law of transformation of curvature in conformal mapping*). Sean $z = u + iv \in D \subset \mathbb{C}$ y $f(z) = X(u, v) + iY(u, v)$ una transformación conforme. Sean las curvas c , contenida en D , y C , la imagen de c mediante $f(z)$, ambas parametrizadas según las longitudes de arco s y S , respectivamente, con

$$dS = |f'(z)|ds \quad \text{o} \quad mdS = ds, \quad (2.4)$$

donde $m = |f'(z)|^{-1}$.

Teorema 2.1. *La relación entre las curvaturas κ y K de c y C , respectivamente, en puntos correspondientes es:*

$K = m\kappa + m_v \cos \theta - m_u \sin \theta,$

(2.5)

donde $\theta = \arctg (dv/du)$.

Observación. El vector unitario $\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ es tangente a c en el punto considerado, y $\mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ es el vector normal unitario. La fórmula (2.5) se puede entonces expresar así:

$$K = m\kappa + \langle \nabla m, \mathbf{n} \rangle. \quad (2.6)$$

Demostración. Sea $z_0 \in D$. Sean θ y Θ los ángulos entre el eje real y las rectas tangentes a c y C en z_0 y $f(z_0)$, respectivamente. Como $f(z)$ es una transformación conforme, entonces $\Theta = \theta + \varphi$, donde $\varphi = \arg f'(z_0)$ —véase la ecuación (1.18)—. Además, $K = d\Theta/dS$ y $\kappa = d\theta/ds$ [Struik, 1950, § 1.4]. Por tanto, al tener en cuenta (2.4),

$$K = m \frac{d(\theta + \varphi)}{ds} = m\kappa + m \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.7)$$

Por otra parte,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varphi_u \frac{du}{ds} + \varphi_v \frac{dv}{ds} = \varphi_u \cos \theta + \varphi_v \sin \theta.$$

Finalmente, las funciones $-\log m$ y φ son armónicas conjugadas, según la Proposición 2.1:

$$-(\log m)_u = \varphi_v \quad \text{y} \quad -(\log m)_v = -\varphi_u.$$

El consiguiente valor de $d\varphi/ds$ convierte (2.7) en la ecuación (2.5). ■

El siguiente resultado se debe a Lagrange [1779, § 7] quien se refiere a él como «expressions fort simples». Aquí lo establecemos como una aplicación de la ley de cambio de curvatura del Teorema 2.1.

Teorema 2.2 (Lagrange). *Sea p una proyección conforme del elipsoide en coordenadas (λ, q) y $f(z)$ su función analítica asociada. Sea $m = |f'(z)|^{-1}$. Las curvaturas de las imágenes de los meridianos y de los paralelos, κ_1 y κ_2 , respectivamente, son*

$$\kappa_1 = -\frac{\partial m}{\partial \lambda} \quad \text{y} \quad \kappa_2 = \frac{\partial m}{\partial q}. \quad (2.8)$$

Demostración. En el plano $z = \lambda + iq$ los meridianos y los paralelos son rectilíneos. En virtud de la identidad (2.5), la curvatura de la imagen de una recta es $K = m_q \cos \theta - m_\lambda \sin \theta$. Como en cualquier meridiano se tiene $\theta = \pi/2$, y en todo paralelo se cumple $\theta = 0$, se concluye que $\kappa_1 = -m_\lambda$ y $\kappa_2 = m_q$. ■

Loxodromas. También llamadas *líneas de rumbo*, son las curvas del elipsoide que cortan a todos los meridianos con un ángulo constante. La proyección de Mercator se caracteriza por que las loxodromas se representan por

rectas, excepto semejanzas del plano $z = \lambda + iq$ [Struik, 1950, pp. 60 y 173]. Por tanto, dada una función $f(z)$ asociada con una proyección conforme, la curvatura de la imagen de una loxodroma, según (2.5), es

$$K = m_q \cos \theta - m_\lambda \sin \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman el eje real y la loxodroma en el plano z . En virtud del Teorema 2.2 (Lagrange), se expresa así:

$$K = \kappa_1 \sin \theta + \kappa_2 \cos \theta. \quad (2.9)$$

Función característica

Llamamos *función característica* de la proyección conforme, o de la transformación conforme asociada, a la función

$$m(\lambda, q) = m(z) = |f'(z)|^{-1}.$$

Obsérvese que si $g = f^{-1}$, entonces $m = |g'(f(z))|$, pues $g'(f(z)) = 1/f'(z)$. Es característica porque con sus derivadas parciales obtenemos la curvatura de las imágenes de los meridianos y de los paralelos (Teorema 2.2). Estas curvas son las más importantes en cartografía, pues son propias o características de cada proyección.

En virtud de (2.1) se tiene que $|f'(z)| = r\sigma$, luego la relación entre m y la escala infinitesimal de la proyección es

$$mr\sigma = 1. \quad (2.10)$$

La función característica tiene la siguiente interpretación geométrica. Sabemos, por (2.4) que $mdS = ds$. Se deduce que $mdS_1 = dq$ y $mdS_2 = d\lambda$, donde dS_1 y dS_2 son elementos de arco infinitesimales de meridiano y paralelo, respectivamente, en el plano $f(z)$, que corresponde al mapa de la proyección en cuestión —figura 2.1—.

La relación $mdS = ds$ equivale a $m^2(dX^2 + dY^2) = d\lambda^2 + dq^2$, y, según (1.6), $r^2(d\lambda^2 + dq^2)$ es el elemento de arco del elipsoide terrestre. Entonces una longitud dS en el mapa corresponde a la longitud $mr dS$ en el elipsoide. En la práctica, por tanto, debería aparecer $mr = \sigma^{-1}$ en la leyenda del *mapa topográfico nacional* (escala 1 : 25.000) en lugar de σ .

La función característica es solución de la ecuación diferencial

$$m \Delta m - |\nabla m|^2 = 0. \quad (2.11)$$

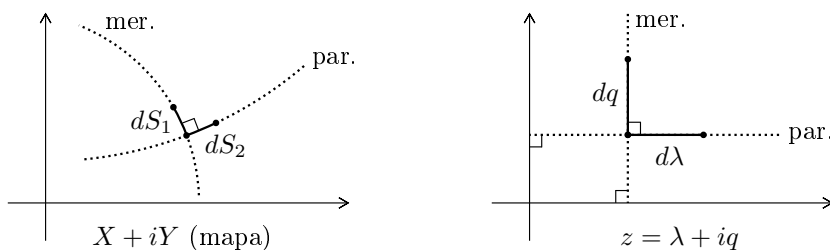


Fig. 2.1. Si medimos las longitudes dS_1 y dS_2 (mapa) y se multiplican ambas por m , entonces obtenemos dq y $d\lambda$, respectivamente.

En efecto, $m^2 \Delta \log m = m \Delta m - |\nabla m|^2$, donde ∇m es el vector gradiente de m , y la función $\log m = -\log|f'(z)|$ es armónica según la Proposición 2.1. Por otra parte, obsérvese que la ecuación (2.11) implica que $\Delta m \geq 0$.

Denominamos *constantes fundamentales* de una familia de proyecciones conformes a las constantes que intervienen en la función característica. Por ejemplo, si $f(z) = Az + B$, entonces $m = |A|^{-1}$, y $|A|^{-1}$ es la constante fundamental de esta familia de transformaciones conformes.

Proyecciones cónicas y acimutales conformes. La expresión general de la transformación conforme asociada con estas proyecciones es

$$f(z) = Ae^{icz} + B, \quad (2.12)$$

confróntese con (1.21) y (1.22). La función característica es, por tanto,

$$m = k|e^{-icz}| = ke^{cq}, \quad (2.13)$$

con $k = |cA|^{-1} > 0$. Las constantes fundamentales son c y $|A|$. En virtud del Teorema 2.2 obtenemos

$$\kappa_1 = 0 \quad \text{y} \quad \kappa_2 = cke^{cq},$$

luego las imágenes de los meridianos son rectas y la de los paralelos son circunferencias con radios proporcionales a $\exp(-cq)$. Además,

$$\log m = cq + \log k,$$

que es una función armónica.

Analicemos las loxodromas de estas proyecciones. Según (2.9), su curvatura es $K = \kappa_2 \cos \theta$, es decir,

$$K = ck \sin \alpha e^{cq}, \quad (2.14)$$

donde α es el ángulo entre la loxodroma y los meridianos. Expresemos K en función de la longitud de arco S . En el plano z la loxodroma es la recta $\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg} \alpha (q - q_0)$, luego

$$ds^2 = d\lambda^2 + dq^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha dq^2 + dq^2 = \sec^2 \alpha dq^2.$$

Como $mdS = ds$, entonces

$$dS = k^{-1} e^{-cq} ds = k^{-1} \sec \alpha e^{-cq} dq,$$

es decir, $S = -(ck)^{-1} \sec \alpha \exp(-cq)$. Esto proporciona q en función de S , que se sustituye en (2.14). Por tanto

$$K = -\operatorname{tg} \alpha \frac{1}{S}, \quad (2.15)$$

curvatura que corresponde a una *espiral logarítmica* [Struik, 1950, § 1.8]. Véase la figura 2.2. ■

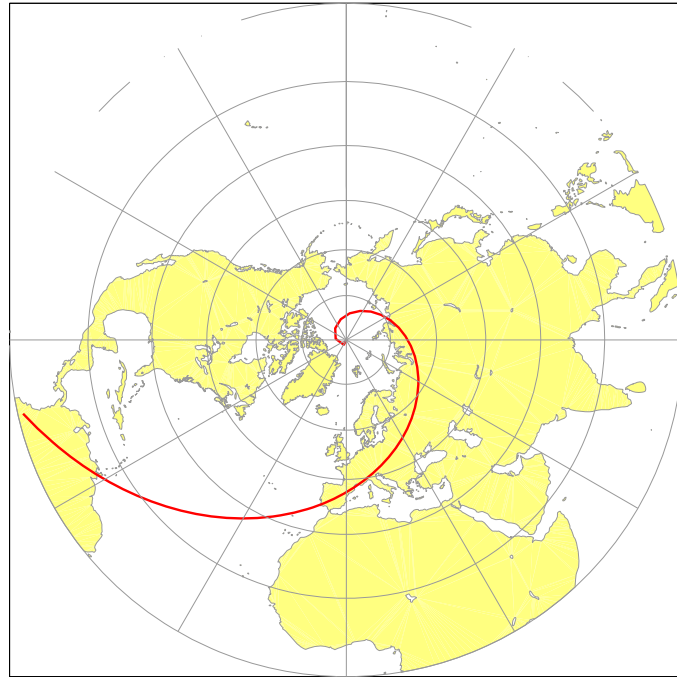


Fig. 2.2. Loxodroma que pasa por el punto $(\lambda, \varphi) = (-3^\circ, 40^\circ)$ con $\alpha = 60^\circ$ en una proyección acimutal conforme. Hemisferio norte.

2.2. Derivada pre-schwarziana

Se define la *derivada pre-schwarziana* de una función analítica $f(z)$ como

$$P(f) = \frac{f''}{f'}. \quad (2.16)$$

(Véase por ejemplo [Osgood, 1998, p. 286].) Exponemos algunas de sus propiedades. Se comprueba que

$$P(f) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad f(z) = az + b, \quad a \neq 0. \quad (2.17)$$

Es decir, las funciones lineales se caracterizan por la ecuación $P(f) = 0$. Si aplicamos la definición (2.16) a la composición de dos funciones, se obtiene la siguiente *regla de la cadena*:

$$P(f \circ g) = [P(f) \circ g] g' + P(g). \quad (2.18)$$

Esto, junto con (2.17), muestra que la pre-schwarziana es *invariante* mediante funciones lineales: si $L(z) = az + b$, entonces

$$P(L \circ f) = P(f). \quad (2.19)$$

Proposición 2.2. Sea $f(z) = X(u, v) + iY(u, v)$ una transformación conforme en una región $D \subset \mathbb{C}$, y sea m su función característica. Entonces

$$P(f) = -\frac{\partial}{\partial u} \log m + i \frac{\partial}{\partial v} \log m = \frac{\partial}{\partial v} \arg f' + i \frac{\partial}{\partial u} \arg f'. \quad (2.20)$$

Demostración. Por hipótesis, la función $\log f' = \log|f'| + i \arg f'$ es analítica en D [Silverman, 1975, § 5.3], luego

$$P(f) = \frac{d}{dz} \log f' = \frac{\partial}{\partial u} \log|f'| + i \frac{\partial}{\partial v} \arg f'. \quad (2.21)$$

En virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann

$$P(f) = \frac{\partial}{\partial u} \log|f'| - i \frac{\partial}{\partial v} \log|f'|,$$

que conduce a la primera identidad de (2.20), pues $\log|f'| = -\log m$. La segunda identidad se obtiene al aplicar nuevamente las condiciones de Cauchy-Riemann en el último miembro de (2.21). ■

Hay dos consecuencias que se extraen de la Proposición 2.2 y que son útiles en cartografía.

1. Expresemos la primera identidad de (2.20) del siguiente modo:

$$mP(f) = -m_u + im_v. \quad (2.22)$$

Si aplicamos ahora el Teorema 2.2 (Lagrange), entonces en proyecciones conformes se cumple:

$$mP(f) = \kappa_1 + i\kappa_2, \quad (2.23)$$

que relaciona la pre-schwarziana con el vector de curvaturas. Por otra parte, esto implica, según (2.11), que

$$|P(f)|^2 = m^{-1}\Delta m.$$

2. La segunda identidad de (2.20) expresa $P(f)$ en términos del $\arg f'$. Si tenemos en cuenta (2.1), en proyecciones conformes se tiene:

$$P(f) = \gamma_q + i\gamma_\lambda, \quad (2.24)$$

que relaciona la pre-schwarziana con la convergencia de meridianos.

La pre-schwarziana interviene en la ley de cambio de curvatura (Teorema 2.1). En efecto, la ecuación (2.5) se escribe también así —véase por ejemplo [Goodman, 1968, p. 527, ecuación (4)] o [Needham, 1997, § 5.9, ecuación (23)]—:

$$K = m\kappa + m \operatorname{Im}[P(f) e^{i\theta}]. \quad (2.25)$$

Esta expresión quizá sea más conveniente cuando se dispone explícitamente de la función $f(z)$. En algunos problemas, sin embargo, solo se dispone de m y, en dicha situación, el cambio de curvatura queda mejor reflejado en el gradiente de m según (2.5). La fórmula (2.22) permite comprobar la equivalencia de (2.5) y (2.25):

$$m \operatorname{Im}[P(f) e^{i\theta}] = \operatorname{Im}[(-m_u + im_v) e^{i\theta}] = m_v \cos \theta - m_u \sin \theta.$$

Proyecciones conformes con pre-schwarziana constante

Consideremos el siguiente problema: encontrar todas las proyecciones conformes cuya convergencia de meridianos es una función de la forma

$$\gamma = c\lambda + bq + a,$$

con a, b y c reales. Está bien definido pues γ es armónica —ecuación (2.2)—. Este problema equivale a encontrar las transformaciones conformes $f(z)$ tales que su pre-schwarziana es constante:

$$P(f) = b + ic,$$

en virtud de (2.24). Sea $k = b + ic$. La ecuación diferencial $P(f) = k$ equivale a $d(\log f')/dz = k$, cuya solución es:

$$f(z) = \begin{cases} Az + B & \text{si } k = 0 \\ Ae^{kz} + B & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

con A y B complejos, $A \neq 0$.

Las proyecciones asociadas con $f(z) = Az + B$ se identifican, excepto semejanzas del plano, con las cilíndricas conformes —véase la Sección 1.5—, y en particular con la proyección de Mercator, donde se tiene que $\gamma = 0$.

La familia de proyecciones asociada con

$$f(z) = Ae^{kz} + B, \quad k = b + ic \neq 0$$

incluye las cónicas y acimutales conformes, si se toma $k = ic$ —véase (2.12)— en cuyo caso $\gamma = c\lambda$. La función característica es

$$m = \alpha |e^{-kz}| = \alpha e^{cq-b\lambda},$$

con $\alpha = |kA|^{-1} > 0$. Las constantes fundamentales de estas proyecciones son b, c y $|A|$. Las curvaturas de las imágenes de los meridianos y los paralelos son, respectivamente,

$$\kappa_1 = b\alpha e^{cq-b\lambda} \quad \text{y} \quad \kappa_2 = c\alpha e^{cq-b\lambda}. \quad (2.26)$$

Obsérvese que $\kappa_1 + i\kappa_2 = m(b + ic) = mP(f)$, ecuación (2.23).

Esta familia de proyecciones tiene la siguiente propiedad: *la red de meridianos y paralelos está formada por espirales logarítmicas*. Para demostrarlo expresemos κ_1 y κ_2 en función de las longitudes de arco S_1 y S_2 , respectivamente. Como $mdS_1 = dq$ y $mdS_2 = d\lambda$ —figura 2.1—, entonces se obtiene, después de integrar, que

$$S_1 = -(c\alpha)^{-1} e^{-cq+b\lambda} \quad \text{y} \quad S_2 = (b\alpha)^{-1} e^{-cq+b\lambda}.$$

Por tanto

$$\kappa_1 = -\frac{b}{c} \frac{1}{S_1} \quad \text{y} \quad \kappa_2 = \frac{c}{b} \frac{1}{S_2},$$

curvaturas que corresponden a espirales logarítmicas [Struik, 1950, § 1.8], excepto en los casos $b = 0$ o $c = 0$, que, según (2.26), proporcionan una red formada por rectas y circunferencias.

Finalmente damos las ecuaciones de estas proyecciones. Para simplificar suponemos que $f(z) = A \exp(kz)$. Entonces

$$\begin{cases} X = |A| e^{b\lambda - cq} \cos(c\lambda + bq + \varphi) \\ Y = |A| e^{b\lambda - cq} \sin(c\lambda + bq + \varphi), \end{cases}$$

donde $\varphi = \arg A$. Hemos creado un mapa —figura 2.3— correspondiente a los valores $A = 1 - i$ y $b = c = 1/2$.

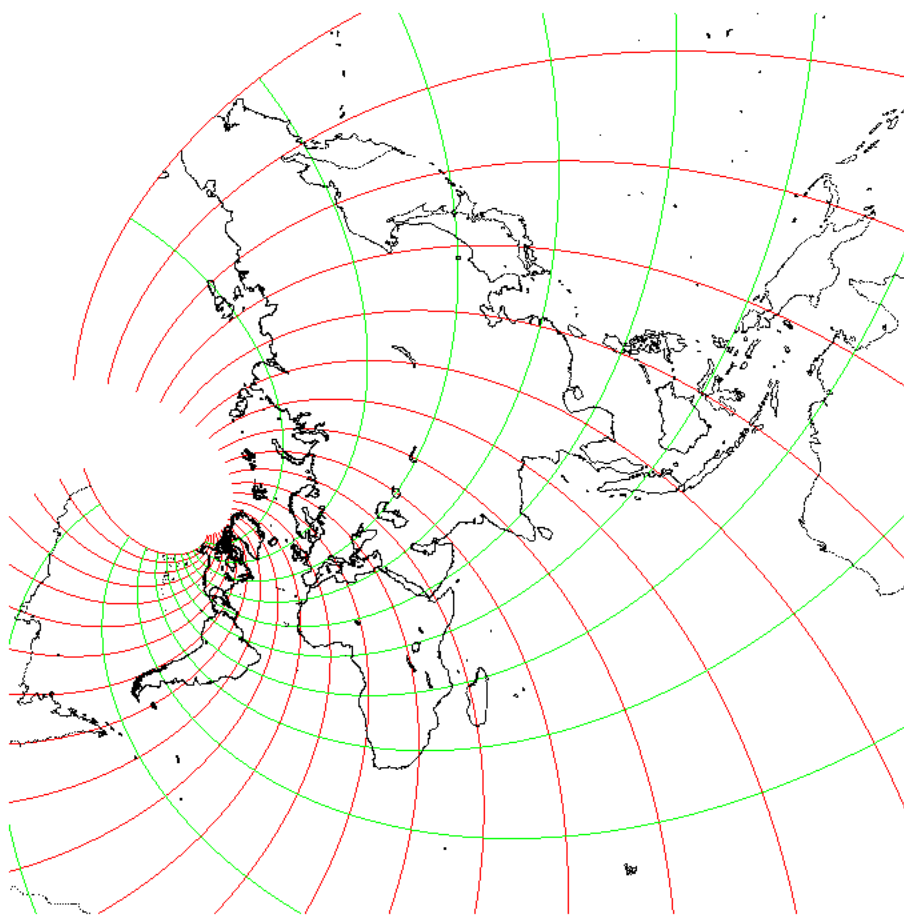


Fig. 2.3. Mapa de la proyección conforme asociada con la función $f(z) = (1 - i) \exp[(1 + i)z/2]$. La red de meridianos y paralelos tiene 15° y está formada por espirales logarítmicas. La pre-schwarziana es constante: $P(f) = (1 + i)/2$.

2.3. Cambio de la derivada tangencial de la curvatura

El siguiente teorema establece la relación que existe entre las derivadas de la curvatura —respecto a la longitud de arco— de una curva y la de su imagen mediante una transformación conforme. La fórmula que presentamos se debe también a Comenetz [1938, p. 86, ec. (13)] quien la denomina *transformation law of the rate of change of curvature with respect to arc-length, under conformal mapping*. Este resultado es fundamental en nuestro trabajo.

Teorema 2.3. *De acuerdo con la notación del Teorema 2.1, la relación entre las derivadas de las curvaturas de c y C , respectivamente, en puntos correspondientes es:*

$$\frac{dK}{dS} = m^2 \frac{d\kappa}{ds} + m \left[m_{uv} \cos 2\theta + \frac{1}{2} (m_{vv} - m_{uu}) \sin 2\theta \right]. \quad (2.27)$$

Demostración. Sean $\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ y $\mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ los respectivos vectores unitarios tangente y normal a la curva c en el punto considerado. Expresamos (2.5) en la forma $K = m\kappa + \langle \nabla m, \mathbf{n} \rangle$, y así

$$\frac{dK}{ds} = m \frac{d\kappa}{ds} + \kappa \frac{dm}{ds} + \left\langle \frac{d}{ds} \nabla m, \mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \nabla m, \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\rangle. \quad (2.28)$$

Analicemos los últimos tres términos de la derecha. Primero,

$$\frac{dm}{ds} = m_u u' + m_v v' = \langle \nabla m, \mathbf{e}_\theta \rangle, \quad (2.29)$$

pues $u' = du/ds$ y $v' = dv/ds$ son las componentes del vector unitario tangente a la curva c . Segundo,

$$\frac{dm_u}{ds} = m_{uu} u' + m_{uv} v' \quad \text{y} \quad \frac{dm_v}{ds} = m_{vu} u' + m_{vv} v',$$

que escribimos en forma matricial:

$$\frac{d}{ds} \nabla m = M \mathbf{e}_\theta, \quad (2.30)$$

donde M es la matriz de las segundas derivadas de m . Por último,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\theta}{ds} (-\cos \theta, -\sin \theta) = -\kappa \mathbf{e}_\theta. \quad (2.31)$$

Al sustituir (2.29), (2.30) y (2.31) en (2.28), y al tener en cuenta (2.4), se obtiene

$$\frac{dK}{dS} = m^2 \frac{d\kappa}{ds} + m \langle M \mathbf{e}_\theta, \mathbf{n} \rangle,$$

que es una expresión abreviada de (2.27). ■

Loxodromas. En la Sección 2.1 obtuvimos que la curvatura de la imagen de una loxodroma es (2.9): $K = \kappa_1 \sin \theta + \kappa_2 \cos \theta$. En el plano z las loxodromas son rectas, luego $\kappa = 0$ y la derivada de la curvatura de su imagen es, en virtud de (2.27),

$$\frac{dK}{dS} = m \left[m_{\lambda q} \cos 2\theta + \frac{1}{2} (m_{qq} - m_{\lambda\lambda}) \sin 2\theta \right]. \quad (2.32)$$

Por ejemplo, en las proyecciones cónicas y acimutales conformes la función característica es (2.13)

$$m = k e^{cq},$$

y sus loxodromas son espirales logarítmicas. En este caso la fórmula (2.32) se convierte en

$$\frac{dK}{dS} = \frac{1}{2} m m_{qq} \sin 2\theta = c^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha e^{2cq},$$

donde α es el ángulo entre la loxodroma y los meridianos. La longitud de arco S , según obtuvimos en la Sección 2.1, es tal que

$$S^{-1} = -ck \cos \alpha e^{cq}.$$

Por tanto

$$\frac{dK}{dS} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{S^2},$$

fórmula que se consigue, por otra parte, al derivar (2.15).

2.4. Derivada de Schwarz

Se define la *derivada de Schwarz* o *schwarziana* de una función analítica $f(z)$ como

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (2.33)$$

$$= [P(f)]' - \frac{1}{2} [P(f)]^2. \quad (2.34)$$

(Véase por ejemplo [Hille, 1962, § 17.6].) Exponemos algunas de sus propiedades. Primero:

$$S(f) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (2.35)$$

Vemos que las transformaciones racionales lineales, básicas en cartografía según mostramos en la Sección 1.5, se caracterizan por la ecuación $S(f) = 0$. La schwarziana satisface la siguiente *regla de la cadena*:

$$S(f \circ g) = [S(f) \circ g] (g')^2 + S(g). \quad (2.36)$$

Esto, junto con (2.35) muestra que es *invariante* mediante transformaciones racionales lineales: si $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, con $ad - bc \neq 0$, entonces

$$S(T \circ f) = S(f). \quad (2.37)$$

La schwarziana está en las entrañas de la cartografía. En efecto, F. Klein escribe en 1884, en su trabajo sobre la teoría del icosaedro, la siguiente nota [Klein, 1884, § 3.6]:

Según una comunicación por la cual estoy agradecido al Señor Schwarz, esta expresión [la schwarziana] se encuentra en las investigaciones de Lagrange sobre representación conforme: «Sur la construction des cartes géographiques,» Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin, 1779.

Así es, para obtener las proyecciones conformes con meridianos y paralelos circulares, Lagrange [1779, § 10] llega a la ecuación diferencial

$$\frac{g''(z)}{g(z)} = \text{constante},$$

donde $g(z) = (f'(z))^{-1/2}$. Como $P(f) = -2g'/g$, entonces

$$S(f) = -2 \frac{g''}{g}.$$

Esta identidad se encuentra en las notas que Wangerin [1894, p. 90] añadió a su traducción del trabajo de Lagrange. Por tanto no resulta extraña la siguiente afirmación en referencia a la schwarziana [Ovsienko y Tabachnikov, 2009]:

It was discovered by Lagrange in his treatise «Sur la construction des cartes géographiques». [p. 34]

Lagrange did introduce some version of the Schwarzian derivative $S(f)$, and for an interesting purpose. [p. 36]

Así como la pre-schwarziana está presente en la ley de cambio de curvatura (2.25), que relaciona κ con K , vamos a demostrar que la schwarziana interviene en la ley (2.28), que relaciona $d\kappa/ds$ con dK/dS . Para ello necesitamos el siguiente resultado, que tiene importancia propia pues proporciona las partes real e imaginaria de la schwarziana.

Proposición 2.3. *Sea $f(z) = X(u, v) + iY(u, v)$ una transformación conforme y sea m su función característica. Entonces*

$$mS(f) = \frac{1}{2}(m_{vv} - m_{uu}) + im_{uv}. \quad (2.38)$$

Demostración. Si utilizamos la definición (2.34), y la fórmula (2.22): $mP(f) = -m_u + im_v$, entonces

$$S(f) = \left(-\frac{m_u}{m}\right)_u + i\left(\frac{m_v}{m}\right)_u - \frac{1}{2}\left(-\frac{m_u}{m} + i\frac{m_v}{m}\right)^2.$$

Después de simplificar y tener en cuenta que m es solución de la ecuación (2.11): $m\Delta m - |\nabla m|^2 = 0$ se obtiene la fórmula (2.38). ■

Transformaciones racionales lineales. Una aplicación de la Proposición 2.3 es la siguiente. La solución de la ecuación $S(f) = 0$ es, en virtud de (2.35), cualquier transformación racional lineal $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, con $ad - bc \neq 0$. La fórmula (2.38) señala que $S(f) = 0$ si y solo si

$$\begin{cases} m_{uu} - m_{vv} = 0 \\ m_{uv} = 0. \end{cases}$$

Por tanto esta es otra caracterización de las transformaciones racionales lineales, establecida por Bell [1941, p. 489, Teorema 1]. En efecto, la función característica es, en el caso no trivial $c \neq 0$:

$$m = D^{-1}|cz + d|^2 = |c|^2 D^{-1}[(u + u_0)^2 + (v + v_0)^2],$$

donde $D = |ad - bc|$ y $d/c = u_0 + iv_0$. ■

La ley de curvatura (2.27) puede escribirse del siguiente modo —véase por ejemplo [Gehring, 1978, p. 107, Lema 4]—:

$$\frac{dK}{dS} = m^2 \frac{d\kappa}{ds} + m^2 \operatorname{Im}[S(f) e^{2i\theta}]. \quad (2.39)$$

Para ello basta demostrar que

$$m_{uv} \cos 2\theta + \frac{1}{2} (m_{vv} - m_{uu}) \sin 2\theta = m \operatorname{Im}[S(f) e^{2i\theta}].$$

El primer miembro es la parte imaginaria de

$$[(m_{vv} - m_{uu})/2 + im_{uv}] e^{2i\theta},$$

que, en virtud de la Proposición 2.3, es igual a $mS(f) \exp(2i\theta)$.

Para finalizar esta sección ofrecemos dos ejemplos: la proyección estereográfica y la proyección transversa de Mercator.

1. Proyección estereográfica. En la Sección 1.5 demostramos que la transformación conforme (1.32):

$$f(z) = 2R \cosh q_0 \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{2}, \quad z_0 = \lambda_0 - iq_0, \quad (2.40)$$

gobierna la proyección estereográfica centrada en (λ_0, q_0) , punto de tangencia de la esfera de radio R con el plano donde se proyecta. Llamamos $k = 2R \cosh q_0 > 0$. La función característica es

$$m = |f'(z)|^{-1} = k^{-1} |1 + \cos(z - z_0)|$$

en virtud de (1.36). Por otra parte, la escala infinitesimal es (1.37):

$$\sigma = \frac{2 \cosh q_0 \cosh q}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)},$$

y $r = R \operatorname{sech} q$. Entonces la identidad (2.10): $mr\sigma = 1$, proporciona

$$m = k^{-1} [\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)]. \quad (2.41)$$

Esto significa que las constantes fundamentales son R , λ_0 y q_0 . Las curvaturas de los meridianos y los paralelos son, respectivamente,

$$\begin{cases} \kappa_1 = -m_\lambda = k^{-1} \sin(\lambda - \lambda_0) \\ \kappa_2 = m_q = k^{-1} \sinh(q + q_0). \end{cases} \quad (2.42)$$

Esto demuestra que los meridianos y los paralelos se transforman en circunferencias cuyos radios son $k |\sin(\lambda - \lambda_0)|^{-1}$ y $k |\sinh(q + q_0)|^{-1}$, respectivamente; y también que el meridiano $\lambda = \lambda_0$ y el paralelo $q = -q_0$ se transforman en rectas.

Hallemos la derivada pre-schwarziana. Como

$$f' = \frac{k}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z - z_0}{2} \right) \quad \text{y} \quad f'' = f' \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{2},$$

entonces

$$P(f) = \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{2}. \quad (2.43)$$

Se deduce que la transformación conforme asociada con la estereográfica, $f(z)$, es solución de la ecuación $P(f) = k^{-1}f$.

Observación. La ecuación $P(f) = af$, con a complejo, equivale a $f'' = aff'$, es decir,

$$f'' = \frac{a}{2} \frac{d}{dz} f^2,$$

que se reduce a la ecuación de primer orden:

$$f' - \frac{a}{2} f^2 = c, \quad \text{con } c \text{ complejo.} \quad (2.44)$$

Esta es un caso particular de la *ecuación de Riccati*: $f' = a(z)f^2 + b(z)f + c(z)$. El cambio de variable

$$-\frac{a}{2}f = \frac{g'}{g}$$

transforma (2.44) en la ecuación

$$g'' + \frac{ac}{2}g = 0,$$

cuya solución general es

$$g(z) = Ae^{i\sqrt{ac/2}z} + Be^{-i\sqrt{ac/2}z}.$$

Por tanto las soluciones de la ecuación $P(f) = af$ son

$$f(z) = -i \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{a}} \frac{A e^{i\sqrt{2ac}z} - B}{A e^{i\sqrt{2ac}z} + B}. \quad (2.45)$$

La función asociada con la estereográfica, $f(z) = k \operatorname{tg}[(z - z_0)/2]$, con $k = 2R \cosh q_0$, está incluida en (2.45) si se considera $a = k^{-1}$, $c = k/2$ y $A = B \exp(-iz_0)$.

Por último, hallemos la derivada schwarziana. Según (2.34) y (2.43),

$$S(f) = \left(\operatorname{tg}[(z - z_0)/2] \right)' - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2[(z - z_0)/2] = \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

Este resultado implica, en virtud de la Proposición 2.3, que las segundas derivadas parciales de m satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} m_{\lambda q} = 0 \\ m_{qq} - m_{\lambda\lambda} = m, \end{cases}$$

que pueden comprobarse a partir de los valores de m_λ y m_q en (2.42). ■

2. Proyección transversa de Mercator. Es una proyección conforme sobre el elipsoide de revolución, que tiene dos propiedades: dado $\lambda_0 \in [-\pi, \pi)$ se cumple que

$$\sigma(\lambda_0, q) = 1 \quad \text{y} \quad \kappa_1(\lambda_0, q) = 0,$$

para todo q . Es decir, la imagen del meridiano λ_0 es una recta y se conservan las distancias en todos sus puntos. Suponemos que $\lambda_0 = 0$ para simplificar. Como $m_r\sigma = 1$ y $\kappa_1 = -m_\lambda$, entonces las dos condiciones anteriores equivalen, en la esfera terrestre (radio R), a

$$\begin{cases} m(0, q) = R^{-1} \cosh q \\ m_\lambda(0, q) = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Una forma de obtener las ecuaciones de la transversa de Mercator es determinar la función característica que satisface (2.47). Aquí vamos a emplear otro método. En primer lugar, consideremos la proyección estereográfica ecuatorial, que está asociada con la función (1.33):

$$2R \operatorname{tg} \frac{z - \lambda_0}{2}. \quad (2.48)$$

Supongamos que $\lambda_0 = -\pi/2$. Se tiene, en virtud de (1.37), que

$$\sigma = \frac{2 \cosh q}{\cosh q - \operatorname{sen} \lambda},$$

luego $\sigma(0, q) = 2$ para todo q . Si multiplicamos por $1/2$ la función (2.48) y suponemos que $R = 1$, entonces obtenemos la función

$$E(z) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right),$$

que ahora cumple la condición $\sigma = 1$ en $\lambda = 0$.

Aún resta la segunda condición: $\lambda = 0$ rectilíneo. En este caso particular de la estereográfica ecuatorial, $E(z)$, la imagen de $\lambda = 0$ es la semicircunferencia unidad centrada en el origen —figura 2.4—:

$$\{E(z) : |E(z)| = 1, |\operatorname{Arg} E(z)| \leq \pi/2\}.$$

La función logaritmo transforma esta curva en el segmento del eje imaginario limitado por $-i\pi/2$ y $+i\pi/2$. Entonces la *proyección transversa de Mercator* está determinada por la transformación conforme

$$f(z) = \operatorname{Log} E(z).$$

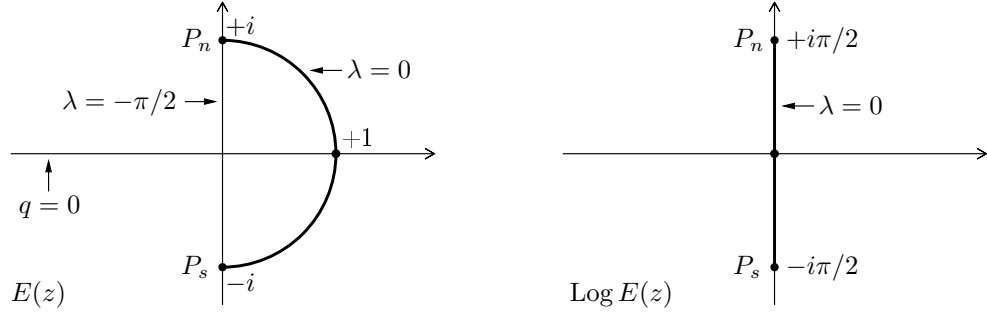


Fig. 2.4. Transformación del meridiano $\lambda = 0$ mediante la función $\text{Log } E(z) = \text{Log } \text{tg}(\pi/4 + z/2)$.

En efecto,

$$f'(z) = E'/E = 1/\cos z, \quad (2.49)$$

luego

$$\sigma(0, q) = \frac{|f'|}{r} = \frac{\cosh q}{|\cos iq|} = 1,$$

para todo q , pues $\cos iq = \cosh q$. A partir de la identidad

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \left(\frac{1 + \text{sen } z}{1 - \text{sen } z}\right)^{1/2},$$

se obtiene

$$f(z) = \text{Log } \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{1 + \text{sen } z}{1 - \text{sen } z} = \text{arc tgh}(\text{sen } z). \quad (2.50)$$

Los puntos excluidos del dominio de definición son $z = \pi/2 + i0$ y $z = -\pi/2 + i0$, porque la función logaritmo está definida para cada número complejo distinto de cero y del infinito [Markushevich, 1970, Capítulo 2, § 5.4].

La proyección transversa de Mercator fue creada por Lambert [1772, §§ 80-92], a partir de la proyección sinusoidal, mediante un desarrollo en serie de potencias de la longitud y la latitud. Sus ecuaciones en la esfera unidad son [Lambert, 1772, § 85]:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \text{sen } \lambda \cos \varphi}{1 - \text{sen } \lambda \cos \varphi} \\ Y = \text{arc tg } \frac{\text{tg } \varphi}{\cos \lambda}, \end{cases}$$

o también

$$\begin{cases} X = \text{arc tgh } \frac{\text{sen } \lambda}{\cosh q} \\ Y = \text{arc tg } \frac{\text{senh } q}{\cos \lambda}, \end{cases}$$

pues $\cos \varphi = \operatorname{sech} q$ y $\operatorname{tg} \varphi = \sinh q$. La función característica, en virtud de (2.49), es

$$m = |\cos z| = (\cos^2 \lambda + \sinh^2 q)^{1/2},$$

porque $\cos(u + iv) = \cos u \cosh v - i \operatorname{sen} u \sinh v$ [Hille, 1959, § 6.4]. La escala infinitesimal, según (2.10), es

$$\sigma = \frac{\cosh q}{(\cos^2 \lambda + \sinh^2 q)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - \operatorname{sen}^2 \lambda \cos^2 \varphi)^{1/2}}.$$

En particular, $\sigma = 1$ si $\lambda = 0$. La curvatura de los meridianos y de los paralelos es, respectivamente,

$$\begin{cases} \kappa_1 = m^{-1} \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda \\ \kappa_2 = m^{-1} \cosh q \sinh q. \end{cases} \quad (2.51)$$

Se deduce que los meridianos $\lambda \in \{0, \pm\pi/2, \pi\}$ y el paralelo $q = 0$ se transforman en rectas. A partir de (1.20): $f'(z) = r\sigma \exp(i\gamma)$, se tiene que

$$\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma = m f'(z). \quad (2.52)$$

En el caso de la transversa de Mercator:

$$\cos \gamma = \frac{\cos \lambda \cosh q}{(\cos^2 \lambda + \sinh^2 q)^{1/2}} = \frac{\cos \lambda}{(\cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

y

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\operatorname{sen} \lambda \sinh q}{(\cos^2 \lambda + \sinh^2 q)^{1/2}} = \frac{\operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \varphi}{(\cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Por último, hallemos las derivadas pre-schwarziana y schwarziana de $f(z)$. En virtud de (2.49) se obtiene que

$$P(f) = \operatorname{tg} z. \quad (2.53)$$

La fórmula (2.22) indica que, en la transversa de Mercator, el módulo del vector de curvaturas es

$$\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} = |\operatorname{sen} z|.$$

A partir de la definición (2.34), hallamos

$$S(f) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 z. \quad (2.54)$$

Véase la figura 2.5. ■

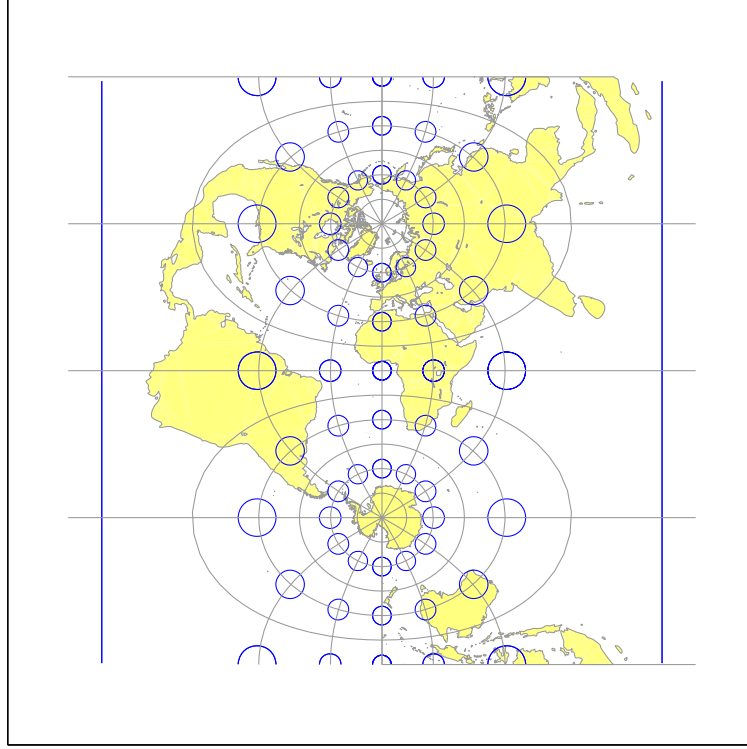


Fig. 2.5. Proyección transversa de Mercator y la imagen de círculos geodésicos.

2.5. Curvatura de las proyecciones de líneas geodésicas

En esta última sección vamos a establecer la curvatura de la imagen de una geodésica contenida en el elipsoide mediante una proyección conforme. Para ello necesitamos conocer el concepto de curvatura geodésica.

Sea c una curva contenida en el elipsoide de revolución Σ . Sea $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrización isométrica del elipsoide, es decir, el elemento de arco del elipsoide es —Sección 1.1—:

$$ds^2 = h^2 (du^2 + dv^2), \quad (2.55)$$

donde $h = h(u, v)$ es tal que $E = G = h^2$. Sea θ el ángulo entre la curva coordenada $\mathbf{x}(u, v_0)$ y la curva c en un punto $x_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, como muestra la figura 2.6. Entonces la *curvatura geodésica* de c en x_0 viene dada por la llamada *fórmula de Liouville* [Struik, 1950, § 4.1, ecuación (13)]:

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} + (\kappa_g)_1 \cos \theta + (\kappa_g)_2 \sin \theta, \quad (2.56)$$

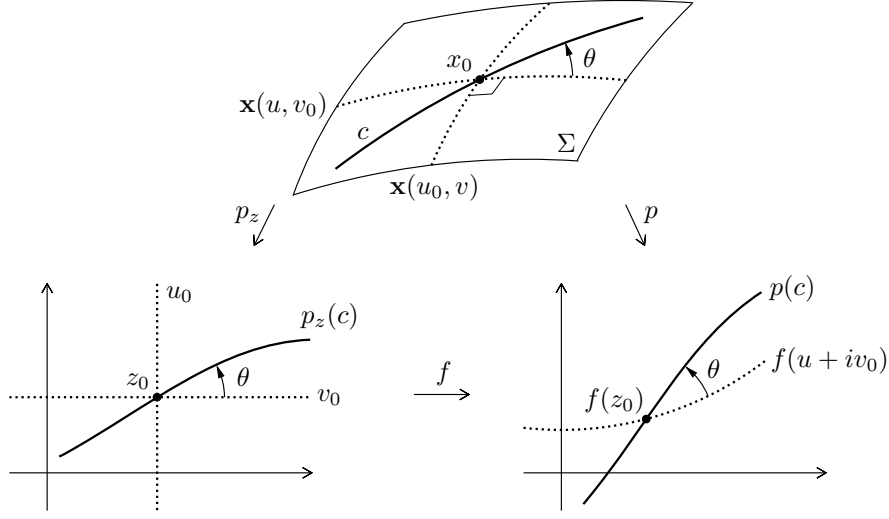


Fig. 2.6. Curva c contenida en el elipsoide Σ y su imagen en los planos $z = u + iv$ y $f(z)$.

donde $(\kappa_g)_1$ y $(\kappa_g)_2$ son las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas $v = v_0$ y $u = u_0$, respectivamente:

$$\begin{cases} (\kappa_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = \frac{\partial}{\partial v} h^{-1} \\ (\kappa_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} = -\frac{\partial}{\partial u} h^{-1}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Las tres fórmulas anteriores son válidas en cualquier superficie con parametrización isométrica. Por ejemplo, en el plano euclidiano se tiene que $E = G = 1$, luego $(\kappa_g)_1 = (\kappa_g)_2 = 0$ y, por tanto, $\kappa_g = d\theta/ds$. En este caso la curvatura geodésica se reduce a la curvatura usual.

Una *geodésica* es una curva tal que $\kappa_g = 0$. Por ejemplo, las rectas contenidas en una superficie son geodésicas [Struik, 1950, § 4.2]. En adelante, suponemos que la curva c , contenida en el elipsoide, es una geodésica. Entonces, en virtud de (2.56) y (2.57), se cumple que

$$\frac{d\theta}{ds} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} h^{-1} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial v} h^{-1} = -\langle \nabla h^{-1}, \mathbf{n} \rangle, \quad (2.58)$$

donde $\mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ es el vector unitario normal a c .

Queremos hallar la curvatura de la imagen de la geodésica c mediante una proyección conforme. Primero consideramos la curva $p_z(c)$, imagen de c en el plano $z = u + iv$, parametrizada según la longitud de arco s_z , como muestra la figura 2.6.

Proposición 2.4. *Sea κ la curvatura de $p_z(c)$. Entonces*

$$\kappa = \langle \nabla \log h, \mathbf{n} \rangle. \quad (2.59)$$

Demostración. El elemento de arco de la curva $p_z(c)$ es, en virtud de (2.55),

$$ds_z = h^{-1} ds.$$

Si tenemos en cuenta (2.58), obtenemos

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds_z} = h \frac{d\theta}{ds} = -h \langle \nabla h^{-1}, \mathbf{n} \rangle,$$

que proporciona el resultado deseado, pues $-h \nabla h^{-1} = \nabla \log h$. ■

Proyección de Mercator. Consideremos la parametrización isométrica $(u, v) = (\lambda, q)$ del elipsoide. En este caso se tiene $h = r$, radio de los paralelos, luego la fórmula (2.59) se convierte en $\kappa = r^{-1} r_q \cos \theta$. Hallamos

$$r_q = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq} = \frac{r}{\rho} \frac{dr}{d\varphi} = -r \sin \varphi, \quad (2.60)$$

donde hemos utilizado las fórmulas (1.2), (1.3) y (1.5). La proyección de Mercator está asociada con el plano $z = \lambda + iq$, luego en esta proyección la curvatura de una geodésica es

$$\kappa = -\sin \varphi \cos \theta. \quad (2.61)$$

En la esfera los círculos máximos son sus geodésicas [Struik, 1950, § 4.2], en particular los meridianos. En todos los puntos de un meridiano se tiene que $\theta = \text{constante} = \pi/2$, luego su curvatura es, en virtud de (2.61), idénticamente nula. Como es sabido, los meridianos de esta proyección son rectas. Otra consecuencia de (2.61) es que $\kappa = 0$ en $\varphi = 0$, es decir, la imagen de la geodésica cruza los puntos de la imagen del ecuador con curvatura nula. Este comportamiento se exhibe en la figura 2.7. ■

El siguiente resultado establece la curvatura de la imagen de una geodésica del elipsoide mediante una proyección conforme p —véase la figura 2.6—.

Teorema 2.4. *Sea $f(z) = X(u, v) + iY(u, v)$ la transformación conforme asociada con p , y sea $p(c)$ la imagen de una geodésica c . Entonces la curvatura de $p(c)$ es*

$$K = -m \langle \nabla \log \sigma, \mathbf{n} \rangle, \quad (2.62)$$

donde $m = |f'(z)|^{-1}$ es la función característica y σ la función escala infinitesimal.

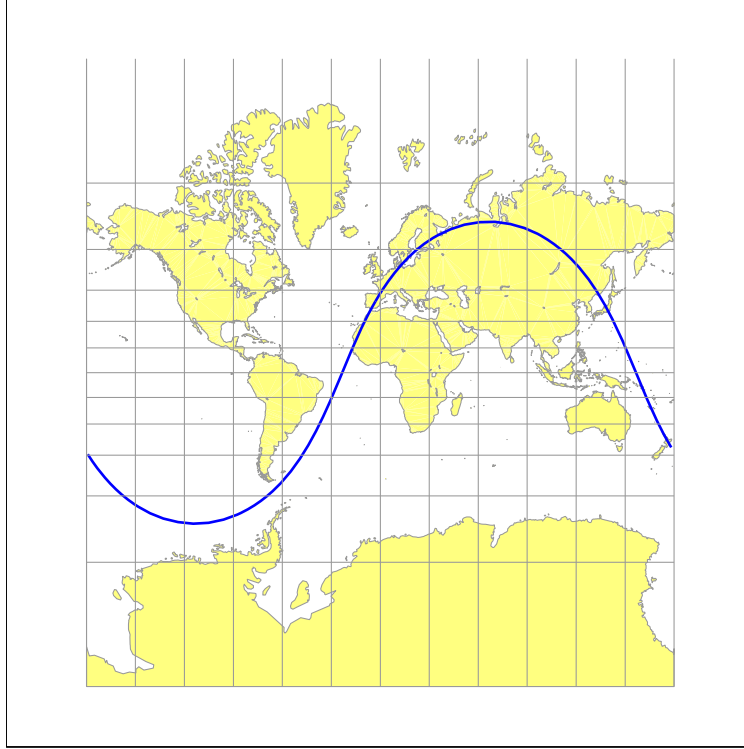


Fig. 2.7. Geodésica que pasa por $(\lambda, \varphi) = (-3^\circ, 40^\circ)$ con $\theta = 60^\circ$, en la proyección de Mercator. Su curvatura es nula en el ecuador.

Demostración. La ley de cambio de curvatura (2.6) establece que

$$K = m\kappa + \langle \nabla m, \mathbf{n} \rangle, \quad (2.63)$$

donde κ es la curvatura de la geodésica en el plano $z = u + iv$. La Proposición 2.4 señala que $\kappa = \langle \nabla \log h, \mathbf{n} \rangle$, luego

$$K = \langle \nabla m + m \nabla \log h, \mathbf{n} \rangle = h^{-1} \langle \nabla(mh), \mathbf{n} \rangle.$$

La función escala infinitesimal es, en virtud de (1.19), $\sigma = (mh)^{-1}$. Por tanto

$$K = m\sigma \langle \nabla \sigma^{-1}, \mathbf{n} \rangle = -m\sigma^{-1} \langle \nabla \sigma, \mathbf{n} \rangle, \quad (2.64)$$

que proporciona el resultado deseado. ■

Observación. La expresión (2.64) se conoce como *fórmula de Schols-Laborde*. Por otra parte, la fórmula (2.63) aparece en un trabajo de Bonnet [1852, § 11, ecuación (6)] sobre proyecciones conformes.

En cartografía podemos manejar fórmulas equivalentes a (2.62). En efecto, en la parametrización $(u, v) = (\lambda, q)$ se tiene $\kappa = -\sin \varphi \cos \theta$, según (2.61).

Al introducir este valor en (2.63) obtenemos

$$K = \langle \nabla m, \mathbf{n} \rangle - m \sin \varphi \cos \theta. \quad (2.65)$$

Como $\nabla m = (-\kappa_1, \kappa_2)$ en virtud del Teorema 2.2, entonces

$$K = \kappa_1 \sin \theta + \kappa_2 \cos \theta - m \sin \varphi \cos \theta.$$

Según (2.9), $K_{\text{loxod}} = \kappa_1 \sin \theta + \kappa_2 \cos \theta$ es la curvatura de la proyección de la loxodroma que, en este caso, cruza a la geodésica en el punto en cuestión y forma el mismo ángulo, θ , con la dirección del paralelo. Por tanto

$$K = K_{\text{loxod}} - m \sin \varphi \cos \theta.$$

Por ejemplo, en la proyección de Mercator, $K_{\text{loxod}} = 0$ pues las loxodromas son rectas, y $m = 1$ pues $f(z) = z$. Entonces $K = -\sin \varphi \cos \theta$, que coincide con (2.61).

Proyección estereográfica polar. La transformación conforme asociada con esta proyección es, según (1.21),

$$f(z) = -2Rie^{iz},$$

donde R es el radio de la esfera. Su función característica es

$$m = (2R)^{-1} |e^{-iz}| = (2R)^{-1} e^q,$$

luego $\nabla m = (0, m)$. La curvatura de la proyección de una geodésica es, en virtud de (2.65),

$$K = m \cos \theta (1 - \sin \varphi) = (2R)^{-1} \frac{\cos \theta}{\cosh q},$$

pues $\sin \varphi = \tanh q$. Como $r = R \operatorname{sech} q$ es el radio del paralelo en el punto en cuestión, entonces

$$K = \frac{1}{2R^2} r \sin \alpha,$$

donde $\alpha = \pi/2 - \theta$ es el *acimut* de la geodésica. Por tanto

$$K = \text{constante}$$

a lo largo de la geodésica, en virtud del *Teorema de Clairaut* [Struik, 1950, § 4.2] que establece que, en una superficie de revolución, el producto $r \sin \alpha$ se mantiene constante a lo largo de una geodésica. En consecuencia, en la estereográfica polar, la imagen de cualquier geodésica es una recta o una circunferencia. Véase la figura 2.8. ■

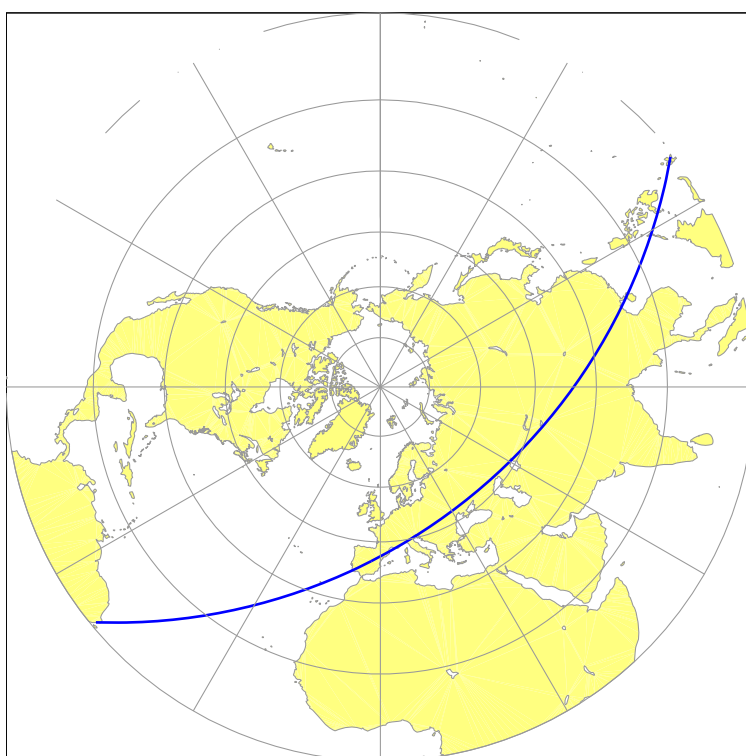


Fig. 2.8. Geodésica que pasa por $(\lambda, \varphi) = (-3^\circ, 40^\circ)$ con $\theta = 30^\circ$, en la proyección estereográfica polar. Hemisferio norte.

Capítulo 3

Teoría general de las proyecciones de Lagrange

Analizamos el trabajo de Lambert relacionado con las proyecciones de Lagrange y lo confrontamos con el trabajo de Lagrange. Después establecemos dos caracterizaciones de las proyecciones de Lagrange. Primero en términos de la función característica; determinamos dicha función y construimos, a partir de ella, las ecuaciones de las proyecciones. La segunda caracterización se expresa en términos de la schwarziana y conduce a una ecuación diferencial cuya solución proporciona las transformaciones conformes.

3.1. Problemas de Lambert y de Lagrange

Analizamos el método que Lambert empleó para construir nuevas proyecciones conformes con la propiedad de transformar los meridianos y los paralelos en circunferencias. Y exponemos dos problemas sobre proyecciones conformes que Lagrange planteó y resolvió. Uno de ellos es el germen de nuestro trabajo.

Proyecciones estereográficas modificadas de Lambert

En 1772 Lambert presenta el trabajo *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelskarten*. Aquí aparecen tres nuevas proyecciones conformes: las cónicas (Capítulo IV), las de Lagrange (Capítulo V) y la cilíndrica transversa (Capítulo VII). Consideremos las dos primeras. Lambert emplea un método común para construir ambas: modificar en las proyecciones estereográficas la convergencia de meridianos en los polos. Sustituye el valor original λ por $c\lambda$ con c constante.

Capítulo IV, §§ 47-57. Lambert modifica la estereográfica polar y crea las proyecciones cónicas conformes:

En consecuencia, si existen etapas intermedias entre estas dos representaciones [Mercator y estereográfica polar], deben buscarse al permitir que el ángulo de intersección de los meridianos sea arbitrariamente más grande o más pequeño que su valor en la superficie de la esfera. Este es el modo en que procederé ahora. [§47.]

Capítulo V, §§ 58-64. Lambert modifica la estereográfica ecuatorial y construye lo que hoy se conoce como proyecciones de Lagrange. Por su relación con nuestro trabajo, analizamos a continuación su método.

Primero Lambert establece las siguientes hipótesis:

Ahora postulamos que los meridianos tienen que ser circunferencias que se cruzan en ambos polos. [§ 58.]

[...] Exigir que los meridianos se corten en los polos en ángulos que se relacionan con los ángulos reales en razón 1 a m . Ahora la cuestión es dibujar los paralelos de modo que las proporciones entre los grados de largo y ancho, y por ello todos los ángulos, conserven sus magnitudes propias [§ 59.]

[...] Aquí, como antes, los paralelos siguen siendo circulares y se cortan en ángulo recto, como antes, con las circunferencias que representan los meridianos. Y también se trazan como en la proyección estereográfica. [§ 60.]

Después Lambert construye la proyección. No da ecuaciones, solo el procedimiento de dibujo, que es el mismo que el de la estereográfica ecuatorial.

En la estereográfica ecuatorial hay un meridiano rectilíneo. Suponemos que es $\lambda = 0$ y lo hacemos corresponder con el eje Y (sistema de referencia intrínseco) como muestra la figura 3.1. Sean P_n y P_s las imágenes de los polos norte y sur, que situamos en $(0, 1)$ y $(0, -1)$ respectivamente. Es suficiente aplicar una homotecia con razón $2R$ para que el sistema corresponda con una esfera (radio R). El eje X representa el ecuador. Sea $(c_1, 0)$ el centro del arco circular con radio R_1 , imagen de un meridiano λ , tal que

$$\gamma(\lambda, \pi/2) = c\lambda, \quad c > 0,$$

En la estereográfica ecuatorial $c = 1$. El punto $(0, c_2)$ es el centro del arco circular con radio R_2 , que representa un paralelo φ . Por hipótesis, este arco corta en ángulo recto a todos los arcos circulares limitados por P_n y P_s , que son imágenes de los meridianos. Por último, llamamos

$$y = y(\varphi)$$

a la ordenada del punto de intersección del paralelo φ con el eje Y . Esta es la incógnita que Lambert plantea.

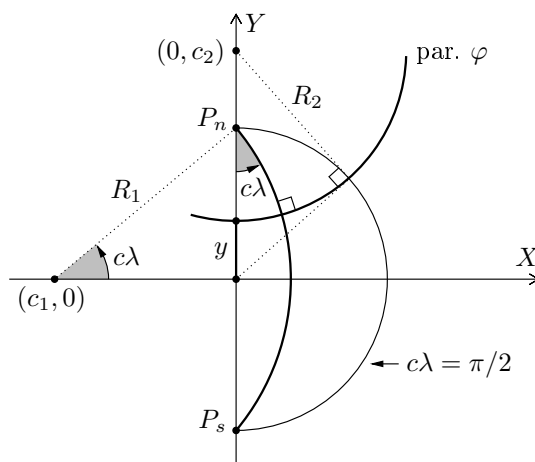


Fig. 3.1. Construcción de la proyección estereográfica ecuatorial modificada de Lambert.

Meridianos. Ya están determinados, pues, según la construcción anterior, el centro y el radio de un meridiano λ son:

$$c_1 = -\cotg(c\lambda) \quad \text{y} \quad R_1 = \operatorname{cosec}(c\lambda). \quad (3.1)$$

Paralelos. El centro y el radio de un paralelo φ satisfacen, según la construcción, las ecuaciones: $c_2^2 = R_2^2 + 1$ y $c_2 = R_2 + y$, que proporcionan:

$$c_2 = \frac{1 + y^2}{2y} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{1 - y^2}{2y}. \quad (3.2)$$

Para determinar la función y , Lambert utiliza la siguiente caracterización de las proyecciones conformes. Primero definimos la *función escala infinitesimal* de una proyección p en un punto \mathbf{x} del elipsoide:

$$\sigma(\mathbf{x}, \alpha) = |dp_x(\mathbf{e}_\alpha)|,$$

donde $\mathbf{e}_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ es el vector unitario que forma un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ con el paralelo que pasa por \mathbf{x} , y dp_x es la aplicación diferencial de p — véase la Sección 1.2—. Por ejemplo, p es conforme si y solo si $\sigma(\mathbf{x}, \alpha)$ solo depende de \mathbf{x} , en virtud del Teorema fundamental de las proyecciones conformes —Sección 1.3—.

Teorema 3.1. *Una proyección p es conforme si y solo si las imágenes de los meridianos y de los paralelos son ortogonales, $\sigma(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}, \pi/2)$, para todo \mathbf{x} , y conserva el sentido de los ángulos.*

Demostración. Una proyección conforme, por definición, conserva los ángulos en magnitud y sentido. Entonces las imágenes de los meridianos y de los paralelos se cortan en ángulo recto. Además, $\sigma(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}, \pi/2)$ pues $\sigma(\mathbf{x}, \alpha)$ solo depende de \mathbf{x} .

Recíprocamente, sea A la matriz de la aplicación dp_x de una proyección p en la base ortonormal $\{\mathbf{x}_u/\sqrt{E}, \mathbf{x}_v/\sqrt{G}\}$ que se identifica con la base canónica de \mathbb{R}^2 :

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}.$$

Si las imágenes de los meridianos y de los paralelos son ortogonales, entonces $\langle A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2 \rangle = 0$, es decir, las columnas de A son ortogonales. Por otra parte,

$$\sigma(\mathbf{x}, 0) = |A\mathbf{e}_1| \quad \text{y} \quad \sigma(\mathbf{x}, \pi/2) = |A\mathbf{e}_2| \quad (3.3)$$

porque \mathbf{e}_0 y $\mathbf{e}_{\pi/2}$ se identifican con \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , respectivamente. Si se cumple $\sigma(\mathbf{x}, 0) = \sigma(\mathbf{x}, \pi/2)$, entonces las columnas de A tienen el mismo módulo. Hemos demostrado que dp_x es una semejanza, directa pues el sentido de los ángulos se conserva, por hipótesis. El Teorema fundamental de las proyecciones conformes permite concluir que p es conforme. ■

Llamamos $\sigma_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \pi/2)$ y $\sigma_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, 0)$, escala infinitesimal en la dirección del meridiano y del paralelo, respectivamente. Lambert, para determinar la función y , impone la condición $\sigma_1(\mathbf{x}) = \sigma_2(\mathbf{x})$ únicamente en $\lambda = 0$:

$$\sigma_1(0, \varphi) = \sigma_2(0, \varphi). \quad (3.4)$$

Según (3.2), si obtenemos y entonces estarán determinados el centro y el radio del paralelo φ . En la esfera unidad la matriz de la aplicación diferencial es (1.11):

$$A = \begin{bmatrix} r^{-1}X_\lambda & X_\varphi \\ r^{-1}Y_\lambda & Y_\varphi \end{bmatrix},$$

donde $r = \cos \varphi$. En virtud de (3.3), tenemos que

$$\sigma_1(\mathbf{x}) = (X_\varphi^2 + Y_\varphi^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \sigma_2(\mathbf{x}) = r^{-1} (X_\lambda^2 + Y_\lambda^2)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Para obtener estas derivadas utilizamos las ecuaciones intrínsecas de la proyección —figura 3.2—:

$$(X, Y) = (0, c_2) + R_2 (\sin \gamma, -\cos \gamma).$$

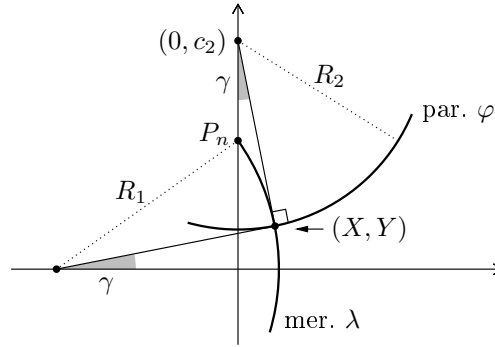


Fig. 3.2. Convergencia de meridianos en la estereografía ecuatorial modificada de Lambert.

Primero hallamos $(X_\lambda, Y_\lambda) = R_2 \gamma_\lambda (\cos \gamma, \sin \gamma)$. Según la figura 3.2 y la fórmula (3.1), se tiene: $\sin \gamma = Y/R_1 = Y \sin(c\lambda)$. Al derivar esta ecuación respecto de λ y tener en cuenta que $\gamma = 0$ en $\lambda = 0$, obtenemos

$$\gamma_\lambda(0, \varphi) = cY(0, \varphi) = cy.$$

Por otra parte,

$$X_\varphi(0, \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad Y_\varphi(0, \varphi) = y_\varphi,$$

pues $X_\varphi = (R_2)_\varphi \sin \gamma + R_2 \gamma_\varphi \cos \gamma$, y además $\gamma_\varphi = 0$ en $\lambda = 0$. Por tanto en el punto $(0, \varphi)$

$$(X_\lambda^2 + Y_\lambda^2)^{1/2} = cR_2 y \quad \text{y} \quad (X_\varphi^2 + Y_\varphi^2)^{1/2} = y_\varphi.$$

Al sustituir estos valores en (3.5), entonces la condición (3.4) se expresa así:

$$y_\varphi = cr^{-1} R_2 y.$$

En virtud de (3.2) y puesto que $y_\varphi = r^{-1} y_q$, obtenemos finalmente

$$\boxed{\frac{dy}{1-y^2} = \frac{c}{2} dq.}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} = \frac{c}{2} (q - q_0), \quad q_0 \text{ constante},$$

es decir, $y = \operatorname{tgh} [c(q - q_0)/2]$. La condición $y(0) = 0$ implica $q_0 = 0$, luego

$$y = \operatorname{tgh} (cq/2).$$

Este valor determina, según (3.2), el centro y el radio de cualquier paralelo q :

$$c_2 = \operatorname{cotgh} (cq) \quad \text{y} \quad R_2 = \operatorname{cosech} (cq). \quad (3.6)$$

Las curvaturas de los meridianos y paralelos en la nueva proyección son, en virtud de (3.1) y (3.6):

$$\kappa_1 = \operatorname{sen} (c\lambda) \quad \text{y} \quad \kappa_2 = \operatorname{senh} (cq). \quad (3.7)$$

Ambos valores deben dividirse por $2R$ para que corresponda con una esfera de radio R . Las curvaturas en la estereográfica ecuatorial son:

$$\kappa_1 = \operatorname{sen} \lambda \quad \text{y} \quad \kappa_2 = \operatorname{senh} q,$$

si consideramos $\lambda_0 = q_0 = 0$ en (2.42) y omitimos la constante $2R$. Por tanto es natural pensar que si $f(z)$ es la transformación conforme de la nueva proyección, *estereográfica modificada*, de Lambert y $E(z)$ corresponde a la estereográfica ecuatorial, entonces

$$f(z) = E(cz) = \operatorname{tg} (cz/2), \quad (3.8)$$

pues a partir de (2.40) se tiene que $E(z) = \operatorname{tg} (z/2)$. En efecto, la función característica es

$$m(z) = |f'(z)|^{-1} = c^{-1} |E'(cz)|^{-1} = c^{-1} m_E(cz),$$

donde $m_E(z) = \cos \lambda + \cosh q$ es, en virtud de (2.41), la función característica de la estereográfica ecuatorial. En consecuencia

$$m(z) = c^{-1} [\cos (c\lambda) + \cosh (cq)],$$

que concuerda con los valores de κ_1 y κ_2 en (3.7), pues el Teorema 2.2 establece que $\nabla m = (-\kappa_1, \kappa_2)$.

La fórmula (3.8) proporciona las ecuaciones de la estereográfica modificada de Lambert:

$$\begin{cases} X = \frac{\operatorname{sen} (c\lambda)}{\cos (c\lambda) + \cosh (cq)} \\ Y = \frac{\operatorname{senh} (cq)}{\cos (c\lambda) + \cosh (cq)}. \end{cases}$$

Se cumple la siguiente propiedad: $\kappa_1^{-1}X = \kappa_2^{-1}Y$, es decir, $R_1X = R_2Y$. La figura 3.2 ofrece esta relación sin necesidad de conocer las ecuaciones de la proyección, pues $Y/R_1 = \sin \gamma = X/R_2$. Precisamente se puede utilizar esta relación junto con las condiciones de Cauchy-Riemann para hallar las ecuaciones.

Por último, reproducimos en la figura 3.3 el mapa que Lambert incluye en su trabajo mencionado al principio [1772, § 63]. Este mapa corresponde a $c = 1/2$. El mundo se representa en un círculo porque:

Los meridianos se cortan en los polos en la mitad de los ángulos, y los 360 grados de longitud se reducen a la mitad de 360 o 180 grados completos.
[§ 62.]

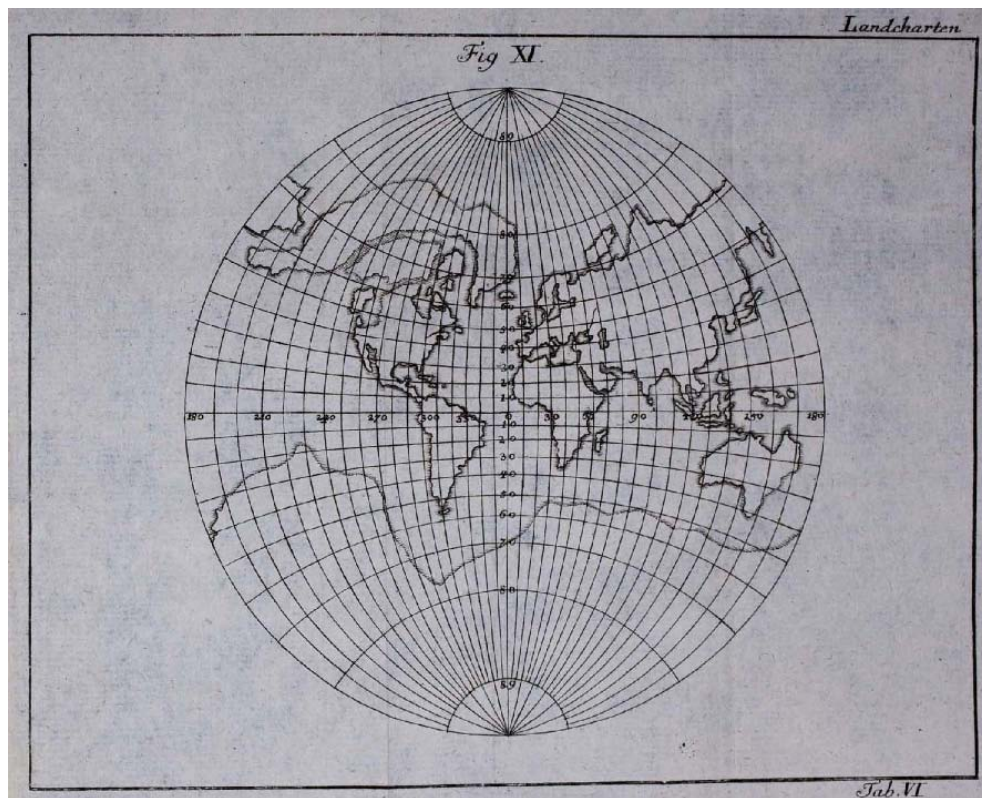


Fig. 3.3. Facsímile del mapa de la proyección estereográfica modificada de Lambert con $c = 1/2$. Su transformación conforme es $f(z) = \operatorname{tg}(z/4)$.

Problema de Lagrange

En 1779 Lagrange presenta el trabajo *Sur la construction des cartes géographiques*, dividido en dos memorias, donde plantea y resuelve dos problemas:

1. Obtener todas las proyecciones conformes de una superficie de revolución.
2. Determinar, en particular, aquellas con la propiedad de transformar los meridianos y los paralelos en circunferencias.

Así lo explica en los dos últimos párrafos de la introducción de la primera memoria:

El difunto Sr. Lambert fue el primero que consideró la Teoría de los Mapas desde el punto de vista general que voy a exponer, y en consecuencia el que tuvo la idea de determinar las líneas de los meridianos y de los paralelos según la única condición de que todos los ángulos formados en el Mapa sean iguales a los ángulos correspondientes en la superficie del globo. Este Problema, del que se encuentra una solución general en el tercer Volumen de los *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik*, etc., después fue resuelto también por el Sr. Euler en el Volumen que acaba de publicarse de las *Actes de l'Académie de Pétersbourg* del año 1777; pero estos dos ilustres Autores a continuación se contentaron con hacer ver que las Teorías conocidas de la proyección estereográfica y de las Cartas reducidas están contenidas en esa solución, y nadie se ha encargado todavía de dar a estas Teorías toda la extensión de la que son susceptibles, determinando todos los casos en los que la solución en cuestión puede dar circunferencias para los meridianos y los paralelos.

Esta investigación, interesante igualmente por los artificios analíticos que requiere y por la utilidad que puede tener para la perfección de los Mapas, me parece digna de la atención de los Geómetras y propia para proporcionar la materia de una Memoria. En primer lugar resolveré el mismo Problema según un método distinto del de los Sres. Lambert y Euler, y, si no me equivoco, más sencillo y más general en algunos aspectos; a continuación aplicaré la solución general en el caso particular en que se supone que los meridianos y los paralelos son circunferencias, que son las únicas curvas que se pueden emplear fácilmente en la construcción de los Mapas; y además resolveré algunas otras cuestiones relativas a este objeto y de donde resultan varias consecuencias útiles.

Obsérvese que Lagrange cita a Lambert [1772, Capítulo VI, §§ 65-79] en referencia al Problema 1 únicamente. Este problema queda resuelto en la § 3. Lagrange obtiene que las ecuaciones de una proyección conforme están determinadas por las partes real e imaginaria de una función analítica con derivada distinta de cero:

Un Mapa construido según las expresiones de x e y , que acabamos de hallar, tendrá la misma propiedad que ya hemos observado ser común a los Mapas estereográficos y a las Cartas reducidas, y que consiste en que cada parte infinitamente pequeña de la superficie de la Tierra conserva su forma en el Mapa y no se altera más que en su tamaño. [§ 4.]

La resolución del Problema 2, que en adelante denominamos *Problema de Lagrange*, se realiza en las §§ 6-12:

La cuestión se reduce a determinar la forma de las funciones desconocidas de la solución general de modo que de ello resulten líneas de una naturaleza dada para los meridianos y para los paralelos. Esta cuestión aún no ha sido resuelta [...] pero para las necesidades de la Geografía basta resolverla en el caso particular en que los meridianos y los paralelos deben ser arcos de circunferencia, lo que comprende a la vez los dos casos de la proyección estereográfica y de las Cartas reducidas. [§ 6.]

En el tercer párrafo de la introducción de la segunda memoria vuelve a referirse a él:

Semejante Problema es el que ha sido el principal objeto de la Memoria precedente, y que nadie, que yo sepa, había tratado todavía de resolver.

Nosotros vamos a resolver el Problema de Lagrange en las siguientes secciones de este capítulo, con métodos distintos pero relacionados con el que emplea Lagrange. Al contrastarlo con el Problema de Lambert, que hemos analizado anteriormente, vemos que ambos son diferentes en su planteamiento y resolución:

Lambert. Modifica la estereográfica ecuatorial para construir la proyección. No da ecuaciones, solo el procedimiento de dibujo.

Lagrange. Determina la condición que debe satisfacer una transformación conforme para que los meridianos y paralelos sean circulares. Obtiene dicha transformación y las ecuaciones de la proyección.

Por tanto creemos que no ha lugar una discusión sobre la paternidad de dichas proyecciones conformes.

3.2. Función característica de las proyecciones de Lagrange

Una *proyección de Lagrange* es una proyección conforme del elipsoide que tiene la propiedad de transformar los meridianos y los paralelos en rectas o en circunferencias.

Según esta definición la proyección de Mercator, las estereográficas de la esfera y las proyecciones cónicas conformes de Lambert son proyecciones de Lagrange.

Si una proyección conforme transforma los meridianos en rectas o circunferencias, entonces, en virtud del Teorema 2.2, m_λ es función solo de λ , luego $m_{\lambda q} = 0$. Esto implica, otra vez por el Teorema 2.2, que los paralelos son también rectas o circunferencias. Recíprocamente, si los paralelos son rectilíneos o circulares entonces también deben serlo los meridianos. Vemos que la condición común a la circularidad de unos y otros es $m_{\lambda q} = 0$, lo que demuestra el siguiente resultado debido a Lagrange [1779, § 9].

Teorema 3.2. *Sea p una proyección conforme del elipsoide en coordenadas (λ, q) y sea m su función característica. Entonces p es una proyección de Lagrange si y solo si*

$$m_{\lambda q} = 0. \quad (3.9)$$

Llamamos *transformación de Lagrange* a la transformación conforme $f(z)$ asociada con la proyección de Lagrange. El objetivo es obtener estas transformaciones, es decir, encontrar las funciones analíticas $f(z)$, con $f'(z) \neq 0$, tales que su función característica, $m = |f'(z)|^{-1}$, es solución de la ecuación diferencial (3.9). Se presentan dos caminos.

1. Resolver $m_{\lambda q} = 0$, y después construir, a partir de m , las ecuaciones de las proyecciones de Lagrange en coordenadas cartesianas.
2. Caracterizar a las proyecciones de Lagrange como las soluciones de la ecuación diferencial $S(f) = \text{constante}$, donde $S(f)$ es la schwarziana —véase la Sección 2.4—. Este procedimiento, más cerca de las ideas de Lagrange, proporciona las transformaciones de Lagrange.

En esta sección abordamos la primera parte del primer camino. Vamos a hallar el conjunto de funciones

$$\{m \in C^2([-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) : \Delta \log m = 0, m_{\lambda q} = 0, m > 0\}.$$

La primera condición expresa que $\log m = -\log|f'(z)|$ es armónica, según establece la Proposición 2.1. Necesitamos dos resultados previos.

Lema 3.1. *Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Entonces $h_{uv} = 0$ si y solo si*

$$h(u, v) = F(u) + G(v).$$

Demostración. Si $h_{uv} = 0$ entonces h_u solo depende de u , luego $h = F(u) + G(v)$. Por otra parte, si h se expresa como $F(u) + G(v)$ entonces $h_{uv} = 0$. ■

Lema 3.2. *Si $m \neq \text{constante}$ es la función característica de una proyección conforme, entonces m no admite constante aditiva.*

Demostración. Supongamos que $m + a$, con a constante es la función característica de una proyección conforme. Entonces m y $m + a$ son, en virtud de (2.11), soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{cases} m \Delta m - |\nabla m|^2 = 0 \\ (m + a) \Delta(m + a) - |\nabla(m + a)|^2 = 0. \end{cases}$$

Se deduce que $a \Delta m = 0$. En consecuencia la constante a debe ser nula, porque $\Delta m = m^{-1} |\nabla m|^2 \neq 0$. ■

Teorema 3.3. *Sea $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Las soluciones del problema*

$$\begin{cases} \Delta \log m = 0 \\ m_{uv} = 0, \quad m > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

son, salvo un factor constante positivo:

1. e^{au} y e^{av} ,
2. $(u - a)^2 + (v - b)^2$,
3. $\cos [c(u - a)] + \cosh [c(v - b)]$ y $\cosh [c(u - a)] + \cos [c(v - b)]$,

donde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $c > 0$.

Demostración. Primero observamos que si m satisface (3.10) y $\alpha > 0$, entonces αm también es solución. Además, las funciones constantes positivas son soluciones.

Cualquier solución de (3.10) se expresa como $m = F(u) + G(v)$, en virtud del lema 3.1. Para determinar F y G tenemos en cuenta que m satisface (2.11):

$$m \Delta m - |\nabla m|^2 = 0. \quad (3.11)$$

Entonces

$$(FF'' - F'^2) + (GG'' - G'^2) = -(FG'' + GF''). \quad (3.12)$$

Separamos las soluciones de esta ecuación en dos grupos.

Grupo I. F o G son constantes.

I.1 F y G constantes. La solución, salvo un factor constante positivo, es

$m = 1.$

1.2 F constante. Se tiene que $m = G(v)$ en virtud del Lema 3.2. La condición $\Delta \log m = 0$ implica $d^2(\log G)/dv^2 = 0$, que, salvo un factor constante positivo, proporciona la solución

$$m = e^{av}, \quad a \neq 0.$$

1.3 G constante. Un razonamiento análogo al anterior conduce a

$$m = e^{au}, \quad a \neq 0.$$

Por tanto el primer grupo de soluciones está formado por las funciones e^{au} y e^{av} , donde $a \in \mathbb{R}$.

Grupo II. F y G no son constantes. En la ecuación (3.12) $FF'' - F'^2$ es función de u y $GG'' - G'^2$ lo es de v . Entonces $\partial^2(FG'' + GF'')/\partial u \partial v = 0$ en virtud del lema 3.1. Es decir,

$$F'G''' = -G'F'''. \quad (3.13)$$

Por hipótesis, existen u_0 y v_0 tales que $F'(u_0) \neq 0$ y $G'(v_0) \neq 0$, luego (3.13) implica

$$G'''(v) = aG'(v) \quad \text{y} \quad F'''(u) = bF'(u),$$

donde $a = -F'''(u_0)/F'(u_0)$ y $b = -G'''(v_0)/G'(v_0)$. Entonces (3.13) se expresa como

$$aF'(u)G'(v) = -bF'(u)G'(v).$$

Al evaluar esta ecuación en (u_0, v_0) se concluye que $a = -b$. Por tanto F y G son soluciones del sistema:

$$\begin{cases} F''' - kF' = 0 \\ G''' + kG' = 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Distinguimos tres casos: $k = 0$, $k < 0$ y $k > 0$.

II.1 Si $k = 0$, F y G deben ser polinomios de segundo grado a lo sumo. Por tanto $m = au^2 + bv^2 + cu + dv + f$. Se tiene

$$\begin{aligned} m \Delta m - |\nabla m|^2 &= 2a(b-a)u^2 + 2b(a-b)v^2 + 2c(b-a)u \\ &\quad + 2d(a-b)v + 2f(a+b) - c^2 - d^2. \end{aligned}$$

El polinomio m es solución de (3.11) si y solo si $a = b$ y $4af = c^2 + d^2$, con $f = m(0, 0) > 0$ y $a > 0$, porque $a = 0$ implicaría m constante. Se deduce que

$$m = a \left[\left(u + \frac{c}{2a} \right)^2 + \left(v + \frac{d}{2a} \right)^2 \right].$$

Las soluciones polinomiales del problema (3.10) son, salvo un factor constante positivo:

$$m = (u - a)^2 + (v - b)^2, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Debe añadirse la condición $(u, v) \neq (a, b)$.

II.2 Si $k < 0$ el sistema (3.14) equivale a

$$\begin{cases} F'' - kF + c_1 = 0 \\ G'' + kG + c_2 = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Basta resolver estas ecuaciones cuando $c_1 = c_2 = 0$. En efecto, (3.15) se expresa así:

$$\begin{cases} \bar{F}'' - k\bar{F} = 0, & \bar{F} = F - c_1/k, \\ \bar{G}'' + k\bar{G} = 0, & \bar{G} = G + c_2/k. \end{cases}$$

Si llamamos $\bar{m} = \bar{F} + \bar{G}$, entonces $m = \bar{m} + (c_1 - c_2)/k$. En virtud del Lema 3.2 se deduce que $m = \bar{m}$.

Las soluciones de $F'' - kF = 0$ y $G'' + kG = 0$ son:

$$F = A \cos [c(u - a)] \quad \text{y} \quad G = B \cosh [c(v - b)],$$

donde $c = \sqrt{-k}$, y a, b, A y B son constantes reales. Es decir,

$$m = A \cos [c(u - a)] + B \cosh [c(v - b)].$$

Como $m \Delta m - |\nabla m|^2 = k(A^2 - B^2)$, entonces m es solución de (3.11) si y solo si $A = \pm B$. Esto da lugar a dos funciones:

$$m_1 = A (\cos [c(u - a)] + \cosh [c(v - b)])$$

y

$$m_2 = A (\cosh [c(v - b)] - \cos [c(u - a)]),$$

donde $A > 0$, pues $\cosh v \geq |\cos u|$ para todo (u, v) . Excluimos la solución m_2 porque $m_2 = m_1(u + \pi/c, v)$. Por tanto, la solución es, salvo un factor constante positivo,

$$m = \cos [c(u - a)] + \cosh [c(v - b)], \quad c > 0, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $(u, v) \neq (a + (2n + 1)\pi/c, b)$, $n \in \mathbb{Z}$.

II.3 Si $k > 0$, basta intercambiar F y G en el sistema (3.15). En consecuencia

$$m = \cosh [c(u - a)] + \cos [c(v - b)], \quad c > 0, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $(u, v) \neq (a, b + (2n + 1)\pi/c)$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

La ecuación $m_{\lambda q} = 0$ caracteriza a las proyecciones de Lagrange, y sus soluciones han quedado establecidas en el Teorema 3.3. En su demostración hemos dividido dichas soluciones en dos grupos según un criterio analítico, pero también existe un fundamento geométrico. En efecto, el Teorema 2.2 establece que

$$\nabla m = (-\kappa_1, \kappa_2),$$

lo que permite identificar los meridianos y paralelos rectilíneos según se anule κ_1 o κ_2 , respectivamente.

La siguiente tabla muestra que, en el grupo I, κ_1 o κ_2 se anulan idénticamente. Por esta razón denominamos *proyecciones de Lagrange rectilíneas* a aquellas cuya función característica pertenece a este grupo.

En el grupo II, κ_1 o κ_2 se anulan aisladamente. Llamamos *proyecciones de Lagrange circulares* a las correspondientes a este grupo.

Función característica de las proyecciones de Lagrange

Proyecciones de Lagrange rectilíneas.

Meridianos o paralelos rectilíneos.

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ \kappa_1 = \kappa_2 = 0 \\ \text{Meridianos y paralelos rectilíneos} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = e^{aq} \\ \kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = ae^{aq} \\ \text{Meridianos rectilíneos y paralelos circulares} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = e^{a\lambda} \\ \kappa_1 = -ae^{a\lambda}, \quad \kappa_2 = 0 \\ \text{Meridianos circulares y paralelos rectilíneos} \end{array} \right.$$

Donde $a \neq 0$.

Proyecciones de Lagrange circulares.

Meridianos y paralelos circulares.

$$\left\{ \begin{array}{l} m = (\lambda - a)^2 + (q - b)^2 \\ \kappa_1 = -2(\lambda - a) \\ \kappa_2 = 2(q - b) \\ \text{Rectas: } \lambda = a, q = b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)] \\ \kappa_1 = c \operatorname{sen}[c(\lambda - a)] \\ \kappa_2 = c \operatorname{senh}[c(q - b)] \\ \text{Rectas: } \lambda = a, \lambda = a \pm \pi/c \in [-\pi, \pi), q = b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \cos[c(q - b)] + \cosh[c(\lambda - a)] \\ \kappa_1 = -c \operatorname{senh}[c(\lambda - a)] \\ \kappa_2 = -c \operatorname{sen}[c(q - b)] \\ \text{Rectas: } \lambda = a, q = b, q = b \pm \pi/c \end{array} \right.$$

Donde $c > 0$ y $(a, b) \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$.

Para concluir esta sección ofrecemos la gráfica de la función característica de las proyecciones de Lagrange de acuerdo con la tabla anterior. El dominio es $\{(\lambda, \varphi) : |\lambda| \leq 180^\circ, |\varphi| \leq 80^\circ\}$.

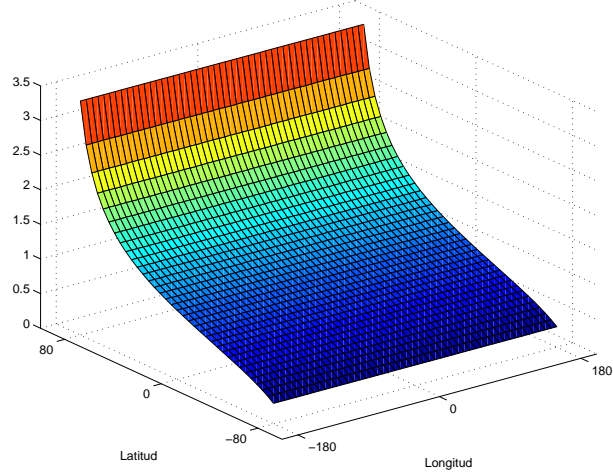


Fig. 3.4. Gráfica de $m = e^{q/2}$. Todos los meridianos son rectilíneos pues su curvatura es $\kappa_1 = -m_\lambda = 0$.

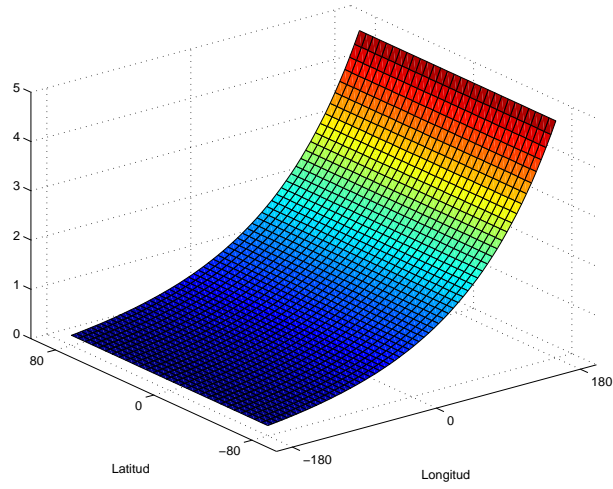


Fig. 3.5. Gráfica de $m = e^{\lambda/2}$. Todos los paralelos son rectilíneos pues su curvatura es $\kappa_2 = m_q = 0$.

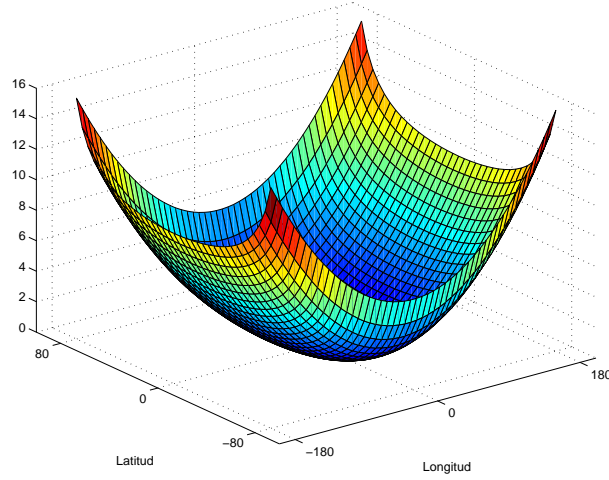


Fig. 3.6. Gráfica de $m = \lambda^2 + q^2$. Los meridianos y paralelos rectilíneos son $\lambda = 0$ y $q = 0$. El resto son circulares.

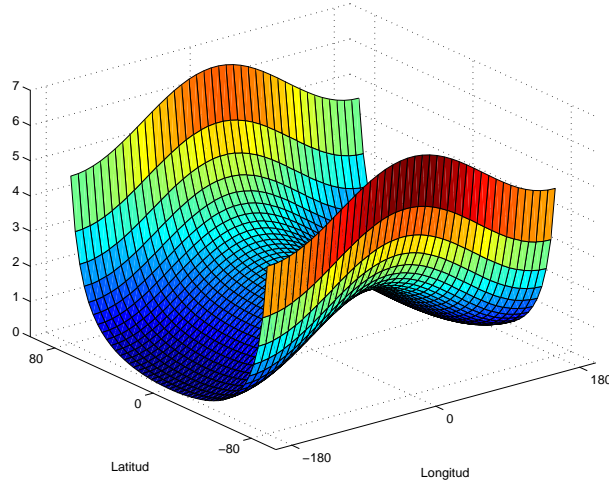


Fig. 3.7. Gráfica de $m = \cos \lambda + \cosh q$. Los meridianos y paralelos rectilíneos son $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\pi$ y $q = 0$. El resto son circulares.

3.3. Construcción de las proyecciones

Hemos obtenido la función característica de las proyecciones de Lagrange. A partir de ella vamos a *construir* las ecuaciones de las proyecciones en coordenadas cartesianas. Milnor [1969, Lema 5] demuestra que la función escala infinitesimal determina la transformación conforme asociada con la proyección, excepto semejanzas del plano, y $m = (r\sigma)^{-1}$. Obsérvese que conocemos las curvaturas de los meridianos y de los paralelos: $\kappa_1 = -m_\lambda$ y

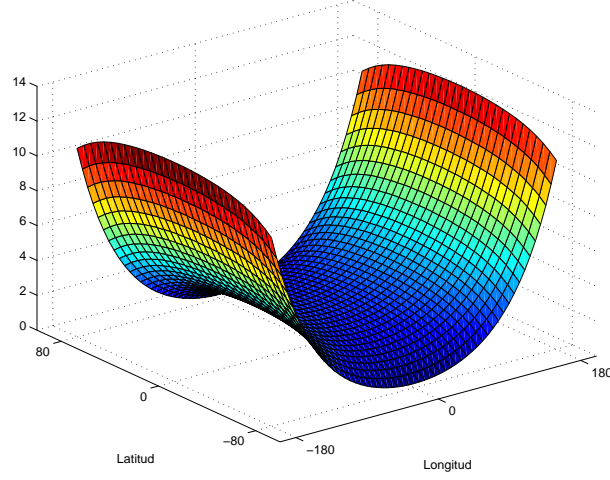


Fig. 3.8. Gráfica de $m = \cos q + \cosh \lambda$. Los meridianos y paralelos rectilíneos son $\lambda = 0$, $q = 0$ y $q = \pm\pi$. El resto son circulares.

$\kappa_2 = m_q$, respectivamente, y también la convergencia de meridianos en virtud de la Proposición 2.2: $\gamma_q = -\partial \log m / \partial \lambda$ y $\gamma_\lambda = \partial \log m / \partial q$.

Proyecciones de Lagrange rectilíneas

Omitimos la construcción porque aquí encontramos dos familias de proyecciones, básicas en cartografía, que están descritas en las Secciones 1.4 y 1.5.

1. Proyecciones cilíndricas conformes. Están asociadas con la función característica

$$m = 1,$$

excepto factor constante positivo. En efecto, según (2.10), se tiene $r\sigma = 1$, que concuerda con la fórmula (1.25). Los meridianos y paralelos son rectilíneos, pues $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

2. Proyecciones cónicas y acimutales conformes. Esta familia se corresponde con

$$m = e^{aq}, \quad a \neq 0,$$

excepto factor constante positivo. Esto implica que $r\sigma = \exp(-aq)$, que se ajusta a la fórmula (1.23). Los meridianos son rectilíneos: $\kappa_1 = 0$, y los paralelos son circulares: $\kappa_2 = a \exp(aq)$.

3. Proyecciones pseudopolares. Denominamos así a las proyecciones de Lagrange rectilíneas caracterizadas por

$$m = e^{a\lambda}, \quad a \neq 0,$$

excepto factor constante positivo. Estudiamos esta familia en el Capítulo 4. A la inversa que en las cónicas y acimutales conformes, los paralelos son rectilíneos: $\kappa_2 = 0$, y los meridianos son circulares: $\kappa_1 = -a \exp(a\lambda)$.

En la figura 3.9 se aprecian las diferencias geométricas de las tres familias de proyecciones de Lagrange rectilíneas.

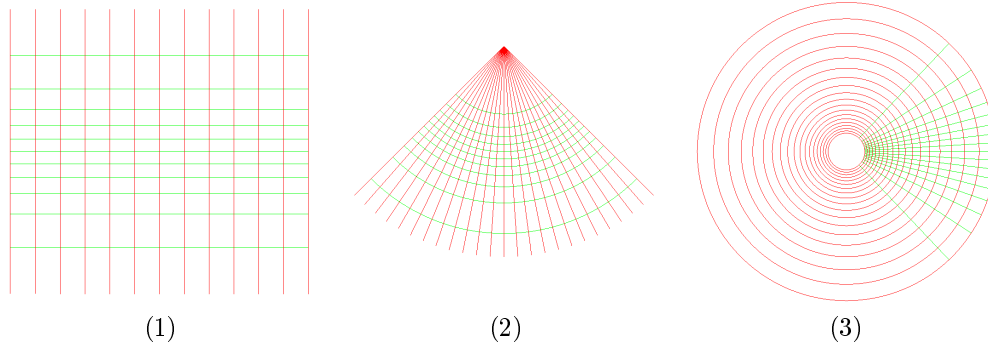


Fig. 3.9. Red de meridianos (rojo) y paralelos (verde) de las proyecciones de Lagrange rectilíneas: cilíndricas conformes (1), cónicas y acimutales conformes (2) y pseudopolares (3).

Proyecciones de Lagrange circulares

Este grupo está compuesto por tres familias de proyecciones que tienen aisladamente algunos meridianos o paralelos rectilíneos. La denominación que damos a cada una se justifica más adelante. El dominio de las constantes es $c > 0$ y $(a, b) \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Conservamos la numeración de las proyecciones de Lagrange rectilíneas.

4. Proyecciones unipolares.

$$\begin{cases} m = (\lambda - a)^2 + (q - b)^2 \\ \kappa_1 = -2(\lambda - a), \quad \kappa_2 = 2(q - b). \end{cases}$$

5. Proyecciones de Lagrange-Lambert.

$$\begin{cases} m = \cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)] \\ \kappa_1 = c \operatorname{sen}[c(\lambda - a)], \quad \kappa_2 = c \operatorname{senh}[c(q - b)]. \end{cases}$$

6. Proyecciones apolares.

$$\begin{cases} m = \cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)] \\ \kappa_1 = -c \sinh [c(\lambda - a)], \quad \kappa_2 = -c \sin [c(q - b)]. \end{cases}$$

Los únicos meridianos y paralelos que se transforman en rectas son los siguientes.

Unipolares: $\lambda = a$ y $q = b$.

De Lagrange-Lambert: $\lambda = a$, $\lambda = a \pm \pi/c \in [-\pi, \pi)$ y $q = b$.

Apolares: $\lambda = a$, $q = b$ y $q = b \pm \pi/c$.

Si dos rectas son las imágenes de un meridiano y un paralelo, entonces deben ser perpendiculares entre sí porque la proyección es conforme. Definimos el siguiente sistema de referencia natural para construir las ecuaciones, común a las tres familias:

$$\begin{cases} \text{eje } X: \text{imagen del paralelo } q = b, \\ \text{eje } Y: \text{imagen del meridiano } \lambda = a, \\ \text{origen de coordenadas: imagen del punto } (\lambda = a, q = b). \end{cases}$$

Aunque exista más de un meridiano o paralelo rectilíneo (proyecciones de Lagrange-Lambert y apolares), el sistema está bien definido porque hay bien un único paralelo rectilíneo (Lagrange-Lambert) bien un único meridiano rectilíneo (apolares).

Consideremos un meridiano $\lambda_0 > a$ y un paralelo $q_0 > b$. Sus imágenes son sendos arcos circulares centrados en los puntos A y D , respectivamente —figura 3.10—. Estos arcos cortan ortogonalmente a los ejes porque la proyección es conforme. Por tanto sus centros están en los ejes. Además, los arcos son ortogonales en el punto C , correspondiente a $f(\lambda_0 + iq_0) = X + iY$.

Queremos determinar $X = EC$ e $Y = BC$. Conocemos los radios de curvatura R_1 y R_2 del meridiano λ_0 y el paralelo q_0 , respectivamente:

$$AC = R_1 = |\kappa_1|^{-1} \quad \text{y} \quad DC = R_2 = |\kappa_2|^{-1}.$$

El ángulo que forma la tangente al paralelo q_0 en $f(z_0)$ con el eje X es la convergencia de meridianos: $\text{Arg } f'(z_0) = \gamma$. Entonces los triángulos ABC y CDE son semejantes, es decir, $BC/AC = EC/DC$. Se deduce la siguiente *propiedad fundamental de dependencia*:

$$R_1 X = R_2 Y.$$

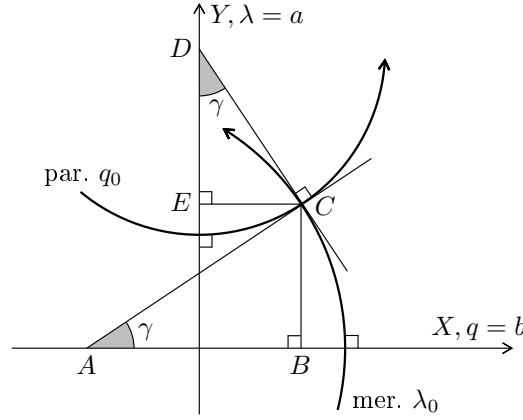


Fig. 3.10. Construcción de las proyecciones de Lagrange circulares.

Por tanto existe una función $F > 0$ que, al menos en el cuadrante de la figura 3.10 donde κ_1 y κ_2 son positivas, cumple:

$$\kappa_1^{-1}X = \kappa_2^{-1}Y = F,$$

luego

$$\begin{cases} X = -Fm_\lambda \\ Y = Fm_q. \end{cases} \quad (3.16)$$

Conjeturamos que (3.16) es cierto en todo el dominio de definición, es decir, que existe una *única* F tal que

$$f(z) = F(-m_\lambda + im_q) \quad (3.17)$$

es analítica y además $|f'(z)|^{-1} = m$.

Para determinar F imponemos las condiciones de Cauchy-Riemann a $f(z)$. Se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} m_\lambda & m_q \\ m_q & -m_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\lambda \\ F_q \end{bmatrix} = -F(m_{\lambda\lambda} + m_{qq}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde se ha tenido en cuenta que $m_{\lambda q} = 0$. La solución es

$$\begin{bmatrix} F_\lambda \\ F_q \end{bmatrix} = -\frac{F}{m} \begin{bmatrix} m_\lambda \\ m_q \end{bmatrix},$$

después de utilizar la ecuación (3.11):

$$m(m_{\lambda\lambda} + m_{qq}) = m_\lambda^2 + m_q^2. \quad (3.18)$$

Vemos que $(mF_\lambda + m_\lambda F, mF_q + m_q F) = \mathbf{0}$, es decir, $\nabla(mF) = \mathbf{0}$. Esto demuestra que mF es constante, positiva porque $F > 0$ en el primer cuadrante de la figura 3.10. Se deduce el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Excepto semejanzas del plano, las ecuaciones de las proyecciones de Lagrange circulares son:*

$$\begin{cases} X = -k \frac{\partial}{\partial \lambda} \log m \\ Y = k \frac{\partial}{\partial q} \log m, \end{cases} \quad (3.19)$$

con $k = 1/2$ (proyecciones unipolares) y $k = 1/c^2$ (proyecciones de Lagrange-Lambert y apolares).

Demostración. Sabemos que $mF = k$ con $k > 0$. Entonces (3.16) se expresa así:

$$\begin{cases} X = -km_\lambda/m \\ Y = km_q/m, \end{cases}$$

que son las ecuaciones buscadas. Para que sean consistentes resta comprobar que $|f'(z)|^{-1}$ coincide con la función característica de las proyecciones de Lagrange circulares. A partir de (3.19) calculamos

$$|f'(z)|^2 = X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 = \frac{k^2}{m^3} [mm_{\lambda\lambda}^2 + m_\lambda^2 (m_{qq} - m_{\lambda\lambda})],$$

donde hemos utilizado (3.18). Luego $|f'(z)|^{-1} = m$ si y solo si

$$\frac{1}{k^2} = m_{\lambda\lambda}^2 + \frac{m_\lambda^2}{m} (m_{qq} - m_{\lambda\lambda}).$$

Se comprueba que $k = 1/2$ en las proyecciones unipolares. En las proyecciones de Lagrange-Lambert y en las las proyecciones apolares se obtiene el mismo valor: $k = 1/c^2$. ■

Según la Proposición 2.2, la pre-schwarziana de $f(z)$ es

$$P(f) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \log m + i \frac{\partial}{\partial q} \log m.$$

Entonces, en virtud del Teorema 3.4,

$$P(f) = k^{-1} (X + iY),$$

que demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea $f(z)$ la transformación conforme asociada con una proyección de Lagrange circular. Entonces*

$$\boxed{P(f) = k^{-1}f.} \quad (3.20)$$

con $k = 1/2$ (proyecciones unipolares) y $k = 1/c^2$ (proyecciones de Lagrange-Lambert y apolares).

Observación. La ecuación (3.20), $f'' - k^{-1}f'f = 0$, se analizó en el ejemplo de la proyección estereográfica general de la Sección 2.4. Se reduce a una ecuación de Riccati:

$$f' - \frac{1}{2k}f^2 = d, \quad d \text{ complejo.}$$

Además, el Teorema 3.5 anticipa la segunda caracterización de las proyecciones de Lagrange: schwarziana constante. En efecto, según (2.34) y (3.20),

$$S(f) = [P(f)]' - \frac{1}{2}[P(f)]^2 = \frac{1}{k} \left(f' - \frac{1}{2k}f^2 \right) = \frac{d}{k}.$$

El Teorema 3.5, junto con las identidades (2.23) y (2.24), señala que las ecuaciones de la proyecciones de Lagrange circulares satisfacen:

$$\begin{cases} X = k\gamma_q \\ Y = k\gamma_\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} X = k\kappa_1/m \\ Y = k\kappa_2/m. \end{cases}$$

Conocemos los valores de k (Teorema 3.4), κ_1 , κ_2 y m de las tres familias de proyecciones de Lagrange circulares. Por tanto, excepto semejanzas del plano, sus ecuaciones son —véase la figura 3.11—:

Proyecciones unipolares:

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{2} \frac{\lambda - a}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2} \\ Y = \frac{1}{2} \frac{q - b}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Proyecciones de Lagrange-Lambert:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{c} \frac{\operatorname{sen}[c(\lambda - a)]}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]} \\ Y = \frac{1}{c} \frac{\operatorname{senh}[c(q - b)]}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Proyecciones apolares:

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{c} \frac{\sinh [c(\lambda - a)]}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]} \\ Y = -\frac{1}{c} \frac{\sin [c(q - b)]}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]} \end{cases} \quad (3.23)$$

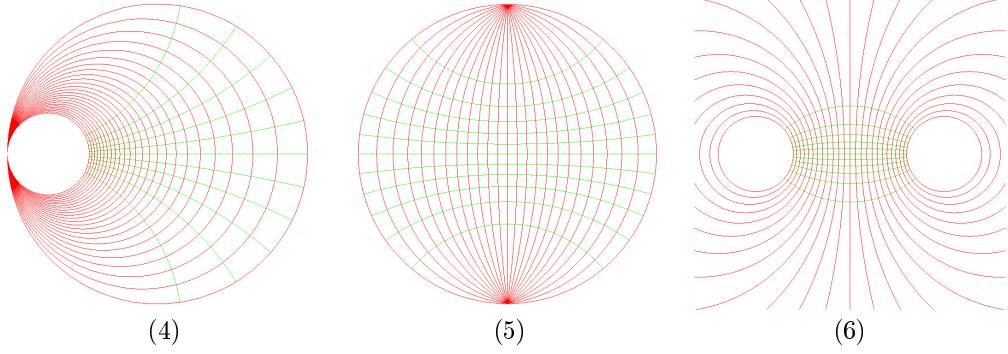


Fig. 3.11. Red de meridianos (rojo) y paralelos (verde) de las proyecciones de Lagrange circulares: unipolares (4), de Lagrange-Lambert (5) y apolares (6).

3.4. Segunda caracterización. Ecuación diferencial de Lagrange

A partir de la primera caracterización, $m_{\lambda q} = 0$, hemos clasificado las proyecciones de Lagrange según la curvatura, y hemos obtenido las ecuaciones en coordenadas cartesianas. Ahora establecemos la segunda caracterización en términos de la schwarziana —véase la Sección 2.4—. Este camino, más cerca de las ideas de Lagrange, proporciona las transformaciones de Lagrange y una segunda clasificación.

Teorema 3.6. *Sea p una proyección conforme del elipsoide en coordenadas (λ, q) y $f(z)$, $z = \lambda + iq$, la función analítica asociada a p . Entonces p es una proyección de Lagrange si y solo si $S(f)$ es constante real, donde*

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$$

es la schwarziana de $f(z)$.

Demostración. Sea p una proyección de Lagrange. Entonces, según la notación del Teorema 2.1, $d\kappa/ds = dK/dS = 0$ en cualquier punto de un paralelo arbitrario. Lo primero porque en Mercator el paralelo es rectilíneo, y lo segundo por la propiedad circular de las proyecciones de Lagrange. Ahora aplicamos la ley de cambio de la derivada tangencial de la curvatura, ecuación (2.39):

$$\frac{dK}{dS} = m^2 \frac{d\kappa}{ds} + m^2 \operatorname{Im}[S(f) e^{2i\theta}]. \quad (3.24)$$

En este caso se concluye que

$$\operatorname{Im}[S(f)(z)] = 0,$$

pues θ , el ángulo que forma la tangente al paralelo en el plano z , se anula en todos los puntos de cualquier paralelo. Como $f(z)$ es una transformación conforme, $f'(z) \neq 0$, entonces $S(f)(z)$ es una función analítica y necesariamente constante real por las condiciones de Cauchy-Riemann.

Recíprocamente, supongamos que $S(f)(z)$ es constante real. Como $\theta = 0$ en cualquier paralelo y $\theta = \pi/2$ en todo meridiano, entonces $dK/dS = 0$ en virtud de (3.24). Por tanto las imágenes de los meridianos y los paralelos son rectas o circunferencias. ■

Llamamos *ecuación diferencial de Lagrange* a

$$S(f) = k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.25)$$

que, según el Teorema 3.6, caracteriza a las transformaciones de Lagrange. Por tanto determinar $f(z)$ equivale a resolver la ecuación diferencial no lineal de tercer orden:

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 = k,$$

cuya solución general se expresa, sin embargo, de forma muy sencilla en virtud del siguiente resultado —véase por ejemplo [Duren, 1983, § 8.5, Lema 1]—.

Teorema 3.7. *Sea p una función analítica. Excepto transformaciones racionales lineales, la función f que resuelve la ecuación $S(f) = p$ está dada por $f = g_1/g_2$, donde g_1 y g_2 son soluciones arbitrarias linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal*

$$g'' + \frac{p}{2}g = 0. \quad (3.26)$$

Denominamos a (3.26) *ecuación de estructura* de $S(f) = p$ —compárese con [Flanders, 1970, §§ 7 y 8]—. En el caso de la ecuación diferencial de Lagrange su ecuación de estructura es

$$g'' + \frac{k}{2}g = 0, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Nota histórica. A partir de la caracterización $m_{\lambda q} = 0$, Lagrange [1779, § 10] obtiene la ecuación de estructura (3.27) que él expresa así:

$$\frac{g''}{g} = k, \quad g = \frac{1}{\sqrt{f'}}.$$

Se comprueba que

$$\frac{g''}{g} = \frac{1}{4} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)'.$$

Por tanto

$$\frac{g''}{g} = -\frac{1}{2}S(f),$$

que implica que $S(f)$ es constante.

No es extraño que Ovsienko y Tabachnikov [2009, p. 34] afirmen que Lagrange *descubre* la derivada de Schwarz:

$$S(f) = -2\frac{g''}{g}.$$

El camino que emprende Lagrange es resolver la ecuación $g'' - kg = 0$, así obtiene $f' = 1/g^2$, y finalmente integra para calcular $f(z)$. Un camino natural.

Para obtener las transformaciones de Lagrange es suficiente suponer $k \geq 0$ en (3.25) debido al siguiente resultado.

Lema 3.3. *Sea $k > 0$ y sea $f(z)$ la solución de $S(f) = k$. Entonces*

$$S(f(iz)) = -k.$$

Demostración. Sea $g(z) = iz$. Según la regla de la cadena (2.36) se tiene

$$S(f(iz)) = -S(f) \circ g = -k,$$

porque $g(z)$ es una transformación lineal, es decir, $S(g) = 0$. ■

Ahora hallamos las transformaciones de Lagrange y las clasificamos en tres clases según $k = 0$, $k > 0$ o $k < 0$ en la ecuación diferencial de Lagrange.

Clase I: $S(f) = 0$

En virtud de (2.35) las soluciones son las transformaciones racionales lineales: $f(z) = (az + b) / (cz + d)$, con $ad - bc \neq 0$. Como es habitual se distinguen los casos $c = 0$ y $c \neq 0$, que dan lugar a dos familias de proyecciones. Después de renombrar las constantes a, b, c y d en los dos casos, obtenemos:

$$\begin{cases} f(z) = Az + B, & A \neq 0, \\ f(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}, & C \neq 0, \quad AD - BC \neq 0. \end{cases}$$

Clase II: $S(f) > 0$

Escribimos $k = c^2/2$ con $c > 0$, luego la ecuación de estructura (3.27) es

$$g'' + \frac{c^2}{4}g = 0. \quad (3.28)$$

Según el Teorema 3.7 necesitamos dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación.

Proposición 3.1. *La solución general de la ecuación $g'' + g = 0$ es*

$$g(z) = ae^{iz} + be^{-iz},$$

donde a y b son constantes complejas arbitrarias.

Demostración. Sea la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.29)$$

con coeficientes complejos. Para que esta función sea solución de $g'' + g = 0$, entonces a_n debe satisfacer la relación recurrente:

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0.$$

Esto proporciona el término general a_n que se sustituye en (3.29):

$$g(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = a_0 \cos z + a_1 \sin z,$$

donde $a_0 = g(0)$ y $a_1 = g'(0)$ son coeficientes arbitrarios. En virtud de las fórmulas de Euler (1.34), la solución obtenida puede expresarse así:

$$g(z) = ae^{iz} + be^{-iz},$$

con $2a = a_0 - a_1i$ y $2b = a_0 + a_1i$. El radio de convergencia de la serie (3.29) es infinito, porque el de la función exponencial es infinito. ■

Sea $g(z) = a \exp(iz) + b \exp(-iz)$ la solución de $g'' + g = 0$ y sea ω un número real. Se comprueba que $g(\sqrt{\omega}z)$ es la solución de la ecuación $g'' + \omega g = 0$. En particular, si $\omega = c^2/4$, se tiene que $g(cz/2)$ resuelve la ecuación de estructura (3.28), lo que proporciona dos soluciones linealmente independientes:

$$g_1(z) = e^{icz/2} \quad \text{y} \quad g_2(z) = e^{-icz/2}.$$

Entonces

$$f = g_1/g_2 = e^{icz}$$

es la función que resuelve la ecuación $S(f) = c^2/2$, excepto transformaciones racionales lineales. Por tanto la solución general de la clase II es

$$f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, \quad AD - BC \neq 0.$$

Distinguiamos como es costumbre los casos $C = 0$ y $C \neq 0$:

$$f(z) = \frac{A}{D}e^{icz} + \frac{B}{D}, \quad AD \neq 0,$$

y

$$f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, \quad C \neq 0, \quad AD - BC \neq 0.$$

Si en el segundo caso suponemos que $D = 0$, se obtiene

$$f(z) = \frac{B}{C}e^{-icz} + \frac{A}{C}, \quad BC \neq 0.$$

Agrupamos estas funciones con el primer caso, extendiendo el dominio de c a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y renombramos las constantes. Entonces la clase II está compuesta por dos familias de proyecciones asociadas con:

$$\begin{cases} f(z) = Ae^{icz} + B, & c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \neq 0, \\ f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, & c > 0, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0. \end{cases}$$

Clase III: $S(f) < 0$

Escribimos $k = -c^2/2$ con $c > 0$. Sea $f(z)$ la solución de $S(f) = c^2/2$. En virtud del Lema 3.3, $S(f(iz)) = -c^2/2$. Por tanto la clase III está integrada por dos familias de proyecciones asociadas con:

$$Ae^{-cz} + B, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \neq 0,$$

y

$$\frac{Ae^{-cz} + B}{Ce^{-cz} + D} = \frac{Be^{cz} + A}{De^{cz} + C}, \quad c > 0, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0.$$

Para unificar la notación respecto a la clase II renombramos algunas constantes, y expresamos finalmente:

$$\begin{cases} f(z) = Ae^{cz} + B, & c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \neq 0, \\ f(z) = \frac{Ae^{cz} + B}{Ce^{cz} + D}, & c > 0, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0. \end{cases}$$

3.5. Síntesis de las transformaciones de Lagrange

Las proyecciones de Lagrange se caracterizan por una de estas condiciones:

$$m_{\lambda q} = 0$$

o

$$S(f) = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

según establecen los Teoremas 3.2 y 3.6, respectivamente. Al resolver la primera ecuación obtuvimos seis familias de proyecciones clasificadas en dos grupos —Secciones 3.2 y 3.3—.

Proyecciones de Lagrange rectilíneas

1. Cilíndricas conformes
2. Cónicas y acimutales conformes
3. Pseudopolares

Proyecciones de Lagrange circulares

4. Unipolares
5. De Lagrange-Lambert
6. Apolares

La segunda caracterización proporcionó las transformaciones de Lagrange, que hemos clasificado en tres clases y se corresponden con las seis familias de proyecciones del siguiente modo.

<p>Clase I: $S(f) = 0$</p> <p>1. Proyecciones cilíndricas conformes: $f(z) = Az + B$.</p> <p>2. Proyecciones unipolares: $f(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$.</p>
<p>Clase II: $S(f) = c^2/2$</p> <p>3. Proyecciones cónicas y acimutales conformes: $f(z) = Ae^{icz} + B$.</p> <p>4. Proyecciones de Lagrange-Lambert: $f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}$.</p>
<p>Clase III: $S(f) = -c^2/2$</p> <p>5. Proyecciones pseudopolares: $f(z) = Ae^{cz} + B$.</p> <p>6. Proyecciones apolares: $f(z) = \frac{Ae^{cz} + B}{Ce^{cz} + D}$.</p>
<p>En 1: $A \neq 0$.</p> <p>En 2: $C \neq 0, AD - BC \neq 0$.</p> <p>En 3 y 5: $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, A \neq 0$.</p> <p>En 4 y 6: $c > 0, CD \neq 0, AD - BC \neq 0$.</p>

Observamos que las proyecciones de Lagrange están gobernadas únicamente por dos transformaciones conformes: las transformaciones racionales lineales y la función exponencial, como ilustra la figura 3.12. En efecto, el plano $z = \lambda + iq$ está asociado con las *proyecciones cilíndricas conformes*. Las funciones $\exp(icz)$ y $\exp(cz)$ transforman la red cartesiana del plano z en la red polar y están asociadas con las *proyecciones cónicas y acimutales conformes* y las *proyecciones pseudopolares*, respectivamente. Estas tres familias constituyen las proyecciones de Lagrange rectilíneas.

Por otra parte, si aplicamos una transformación racional lineal $(Aw + B)/(Cw + D)$ a la red cartesiana del plano z y también a la red polar asociada

con $\exp(icz)$ o con $\exp(cz)$, entonces obtenemos las *proyecciones unipolares*, las *proyecciones de Lagrange-Lambert* y las *proyecciones apolares*, respectivamente. Estas tres familias componen las proyecciones de Lagrange circulares. El siguiente diagrama lo resume.

$$z \longrightarrow \frac{Az + B}{Cz + D}$$

$$e^{icz} \longrightarrow \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}$$

$$e^{cz} \longrightarrow \frac{Ae^{cz} + B}{Ce^{cz} + D}$$

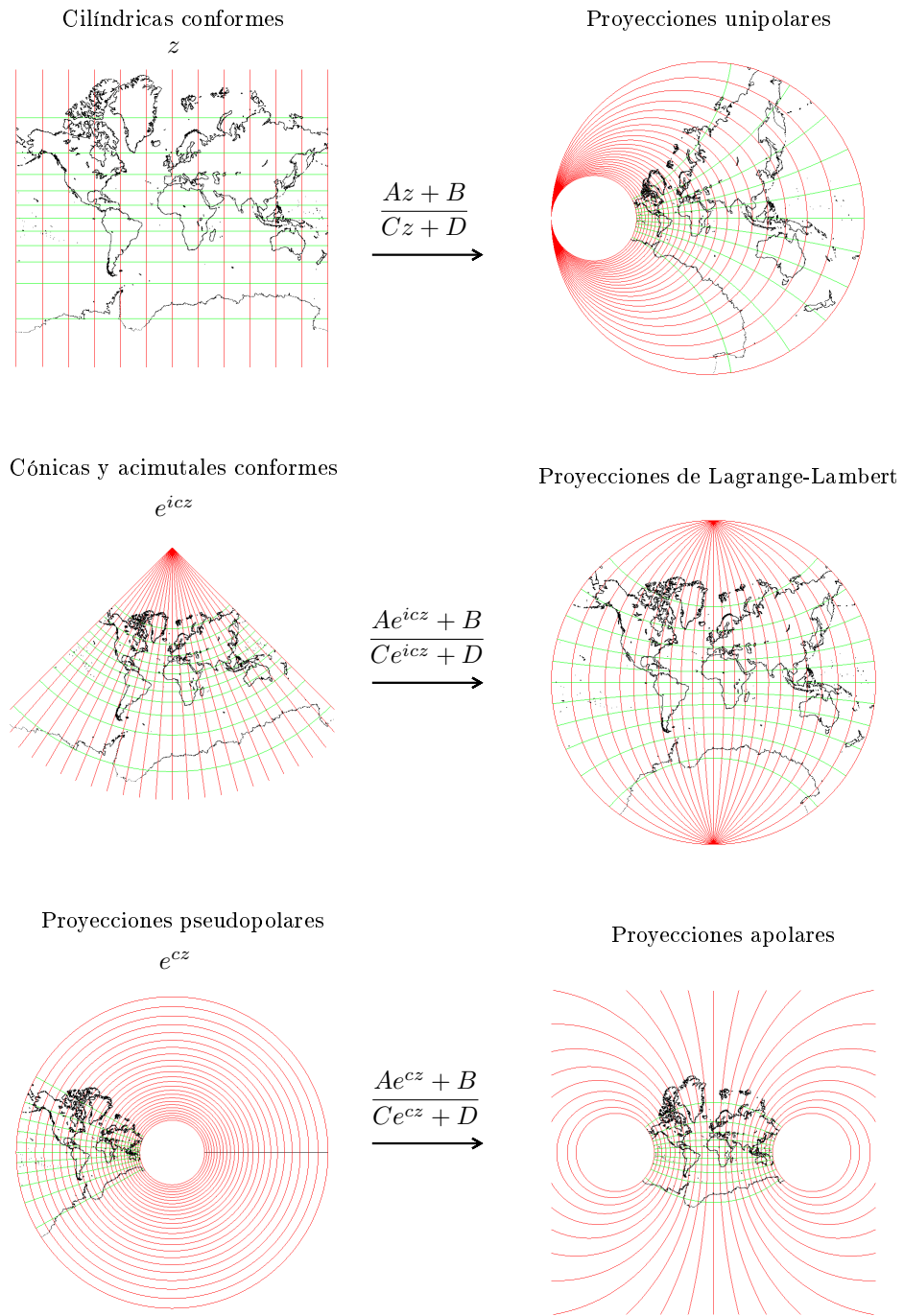


Fig. 3.12. La función exponencial y las transformaciones racionales lineales gobiernan las seis familias de proyecciones de Lagrange.

Capítulo 4

Proyecciones de Lagrange rectilíneas

Según establecimos en el capítulo anterior, las proyecciones de Lagrange rectilíneas están compuestas por tres familias:

1. Proyecciones cilíndricas conformes: meridianos y paralelos rectilíneos,

$$f(z) = Az + B, \quad A \neq 0.$$

2. Proyecciones cónicas y acimutales conformes: meridianos rectilíneos y paralelos circulares,

$$f(z) = Ae^{icz} + B, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, A \neq 0.$$

3. Proyecciones pseudopolares: meridianos circulares y paralelos rectilíneos,

$$f(z) = Ae^{cz} + B, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, A \neq 0.$$

La pre-schwarziana de $f(z)$, f''/f' , es igual a 0, ic y c respectivamente. Por tanto la ecuación

$$P(f) = a + ib, \quad ab = 0, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

caracteriza a las proyecciones de Lagrange rectilíneas. En la Sección 2.2 se incluyó un apartado donde analizamos las proyecciones conformes con pre-schwarziana constante.

De cada familia vamos a obtener la *forma canónica* de la transformación de Lagrange, es decir, vamos a expresar $f(z)$ en el sistema de referencia

intrínseco definido a continuación. Esto da lugar a las *ecuaciones canónicas* de la proyección. Introducimos $z_0 = a + ib \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ tal que

$$f(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Arg } f'(z_0) = 0. \quad (4.1)$$

La segunda condición expresa que $\gamma(a, b) = 0$. Con estas condiciones se tiene que la imagen del meridiano $\lambda = a$ es el eje Y en las familias 1 y 2, y que el paralelo $q = b$ es el eje X en las familias 1 y 3.

Dedicamos más tiempo a las proyecciones pseudopolares, porque las cilíndricas conformes y las cónicas y acimutales conformes son dos familias de proyecciones muy conocidas.

4.1. Cilíndricas conformes

La transformación $f(z) = Az + B$, $A \neq 0$, es una semejanza directa del plano z . Las condiciones (4.1) implican que el eje Y corresponde al meridiano $\lambda = a$ y el eje X al paralelo $q = b$. Las constantes deben satisfacer las ecuaciones: $B = -Az_0$ y $\text{Arg } A = 0$. Si llamamos $c = |A| > 0$, entonces obtenemos

$$f(z) = c(z - z_0),$$

que proporciona las ecuaciones canónicas:

$$\begin{cases} X = c(\lambda - a) \\ Y = c(q - b). \end{cases}$$

La función característica es

$$m(z) = |f'(z)|^{-1} = c^{-1},$$

luego c es la constante fundamental. La escala infinitesimal y la convergencia de meridianos son:

$$r\sigma = c \quad \text{y} \quad \gamma = 0.$$

Si c coincide con el radio de la esfera terrestre, entonces se obtiene la *proyección de Mercator*. Véase la figura 4.1.

Aproximación lineal y pre-schwarziana

Las proyecciones cilíndricas conformes pueden emplearse para aproximar localmente una proyección conforme, y la pre-schwarziana es una medida de dicha aproximación.

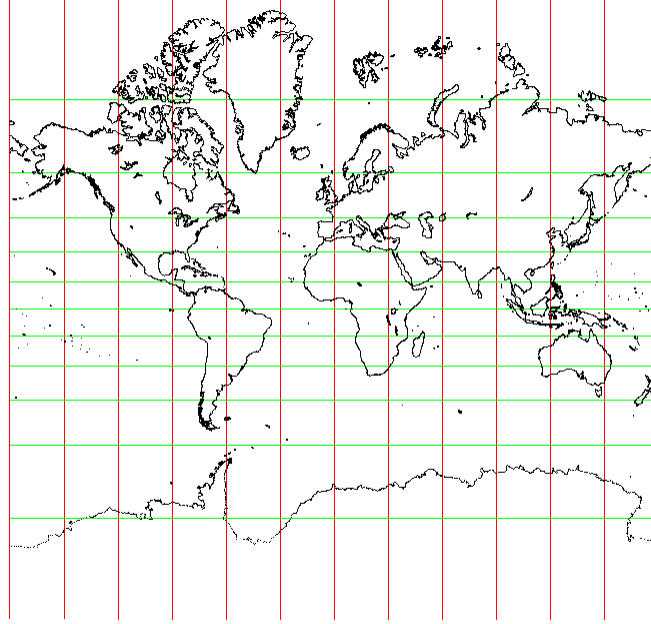


Fig. 4.1. Proyección cilíndrica conforme; $f(z) = z$. La red de meridianos y paralelos tiene 30 grados y 15 grados, respectivamente.

Proposición 4.1. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un dominio plano D . Para cada $z_0 \in D$ con $f'(z_0) \neq 0$, existe una única función lineal

$$L(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \quad (4.2)$$

que aproxima f en z_0 en el sentido:

$$L(z_0) = f(z_0) \quad \text{y} \quad L'(z_0) = f'(z_0). \quad (4.3)$$

Además, la segunda derivada en z_0 satisface:

$$\frac{f'' - L''}{f'} = P(f).$$

Demostración. Sea $L(z) = Az + B$, $A \neq 0$, una función lineal. Dado $z_0 \in D$ con $f'(z_0) \neq 0$, imponemos a $L(z)$ las condiciones (4.3):

$$Az_0 + B = f(z_0) \quad \text{y} \quad A = f'(z_0).$$

La solución (A, B) de este sistema proporciona la función lineal (4.2). Se comprueba que dos funciones lineales que satisfagan (4.3) deben ser idénticas

entre sí. Finalmente se tiene, en el punto en cuestión, que

$$\frac{f'' - L''}{f'} = \frac{f''}{f'}.$$

El segundo miembro es, en virtud de (2.16), la pre-schwarziana de $f(z)$. ■

Un resultado análogo a la Proposición 4.1 con transformaciones racionales lineales y la schwarziana se encuentra en [Carne, 1990, § 2], y nosotros lo demostramos y aplicamos en la Sección 5.3.

Aproximación lineal de la transversa de Mercator. Apliquemos la Proposición 4.1 en el siguiente ejemplo. La proyección transversa de Mercator está asociada, en la esfera, con (2.50):

$$f(z) = \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right).$$

Se tiene que $P(f) = \text{tg } z$, según (2.53). Los únicos ceros de la función $\text{tg } z$ son $z = k\pi$, con k entero [Hille, 1959, § 6.4]. Entonces en estos puntos las funciones lineales son buenas aproximaciones de $f(z)$. En particular, la función lineal

$$L(z) = z$$

aproxima $f(z)$ en $z_0 = 0$, porque $f(0) = 0$ y $f'(z) = 1/\cos z$. Se concluye que la proyección de Mercator es una buena aproximación lineal de la transversa de Mercator en $(\lambda, \varphi) = (0, 0)$.

4.2. Cónicas y acimutales conformes

La transformación $f(z) = A \exp(icz) + B$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A \neq 0$, es una semejanza directa aplicada al plano $\exp(icz)$. Los meridianos son rectilíneos y los paralelos son circunferencias, concéntricas pues $|f(z) - B| = |A| \exp(-cq)$. Las condiciones (4.1) establecen que el eje Y es la imagen del meridiano $\lambda = a$ y que la circunferencia imagen del paralelo $q = b$ es tangente al eje X en el origen. Dichas condiciones implican que

$$B = -Ae^{-icz_0} \quad \text{y} \quad \text{Arg } A = -ca - \text{sgn}(c)\pi/2,$$

donde sgn es la función signo, definida, para todo número real no nulo, como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ +1, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Si llamamos $k = |A| > 0$, entonces la forma canónica de la transformación es

$$f(z) = \operatorname{sgn}(c)ki [e^{-cb} - e^{ic(z-a)}].$$

Si se considera $a = 0$ y $b = q_0$, entonces $f(z)$ coincide con (1.22), excepto el signo de c . Al descomponer $f(z)$, obtenemos las ecuaciones canónicas:

$$\begin{cases} X = \operatorname{sgn}(c)k e^{-cq} \operatorname{sen}[c(\lambda - a)] \\ Y = \operatorname{sgn}(c)k (e^{-cb} - e^{-cq} \cos[c(\lambda - a)]). \end{cases} \quad (4.5)$$

Se calcula

$$f'(z) = k|c|e^{-cq}e^{ic(\lambda-a)}$$

y se deduce que la función característica es

$$m(z) = (k|c|)^{-1} e^{cq},$$

luego k y c son las constantes fundamentales. También se concluye que

$$r\sigma = k|c|e^{-cq} \quad \text{y} \quad \gamma = c(\lambda - a). \quad (4.6)$$

Meridianos y paralelos. Sus ecuaciones son, en virtud de (4.5):

$$Y = \operatorname{tg}[c(\lambda - a) + \pi/2] X + \operatorname{sgn}(c)ke^{-cb}$$

y

$$X^2 + (Y - \operatorname{sgn}(c)ke^{-cb})^2 = (ke^{-cq})^2,$$

respectivamente. Se deduce que

$$f(z) = i \operatorname{sgn}(c)ke^{-cb}$$

es el punto donde concurren las rectas que representan los meridianos, y también el centro de las circunferencias que representan los paralelos —véase la figura 4.2—. Dicho punto es la imagen del polo norte si $c > 0$, y la del polo sur si $c < 0$. Esto se comprueba al calcular el límite de $f(\lambda + iq)$ cuando q tiende a $+\infty$ o $-\infty$, para todo λ .

En las cónicas y acimutales conformes, las loxodromas son espirales logarítmicas, porque, según demostramos en la Sección 2.1, su curvatura es (2.15):

$$K = -\operatorname{tg} \alpha \frac{1}{S},$$

donde α es el ángulo entre la loxodroma y los meridianos, y S es la longitud de arco.

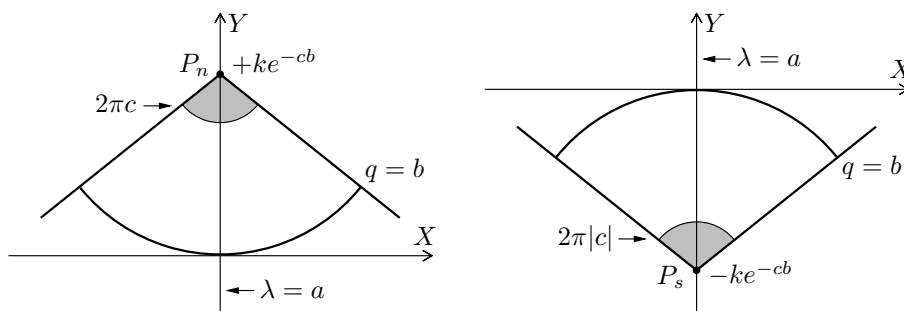


Fig. 4.2. Proyecciones cónicas y acimutales conformes. A la izquierda $c > 0$, a la derecha $c < 0$.

Las proyecciones cónicas conformes están asociadas con $0 < |c| < 1$, y las acimutales conformes con $|c| = 1$. Este último caso coincide, excepto semejanza directa, con la proyección estereográfica polar, asociada con la función $f(z) = -2Ri \exp(iz)$ según (1.21). Las figuras 4.3, 4.4 y 4.5 muestran tres mapas que sirven para cerrar esta sección.

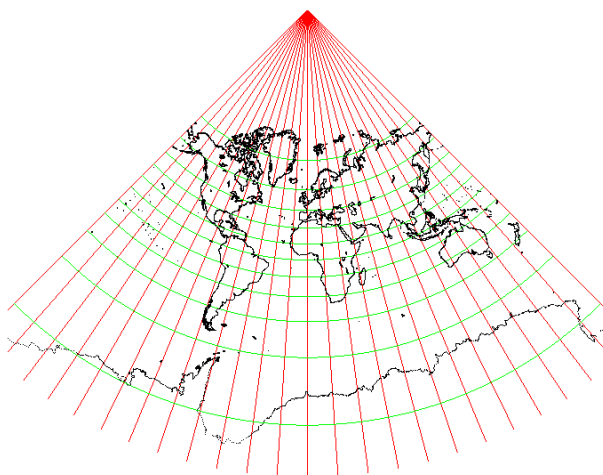


Fig. 4.3. Proyección cónica conforme; $k = 1$, $a = b = 0$, $c = 1/4$, $f(z) = i[1 - \exp(iz/4)]$. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

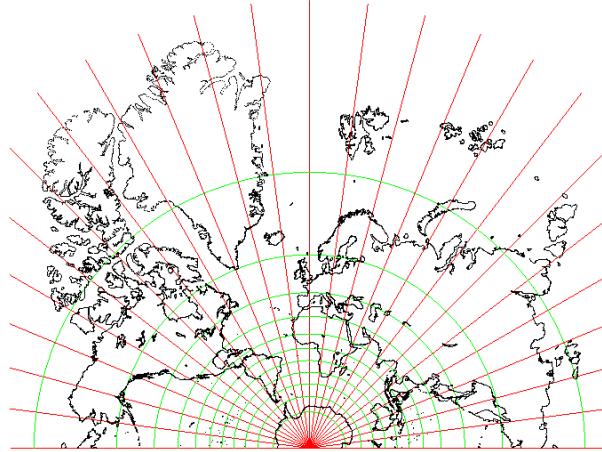


Fig. 4.4. Proyección cónica conforme; $k = 1$, $a = b = 0$, $c = -1/2$, $f(z) = i[\exp(-iz/2) - 1]$. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

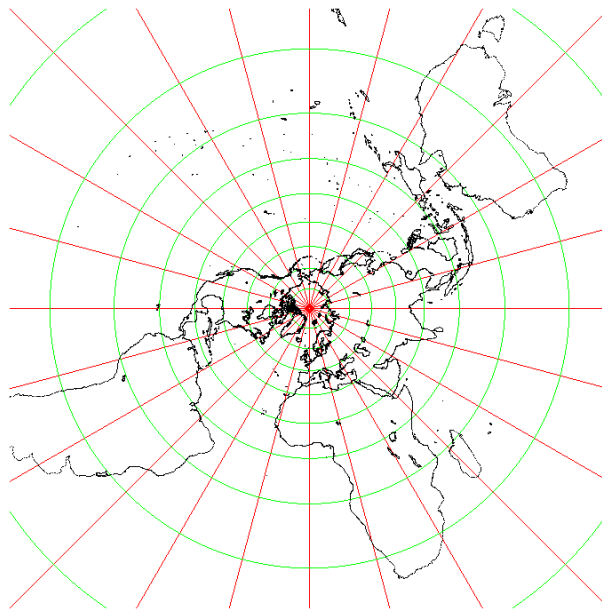


Fig. 4.5. Proyección acimutal conforme; $k = 1$, $a = b = 0$, $c = 1$, $f(z) = i[1 - \exp(iz)]$. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

4.3. Proyecciones pseudopolares

Las proyecciones cilíndricas conformes y las cónicas y acimutales conformes son básicas en cartografía, pero las pseudopolares (denominación nuestra) no han recibido atención, según la bibliografía consultada. Están asociadas con $f(z) = A \exp(cz) + B$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A \neq 0$, que es una semejanza directa aplicada al plano $\exp(cz)$. La función característica es $m = |f'(z)|^{-1} = |cA|^{-1} \exp(-c\lambda)$, luego

$$\kappa_1 = -m_\lambda = \operatorname{sgn}(c)|A|^{-1}e^{-c\lambda} \quad \text{y} \quad \kappa_2 = m_q = 0,$$

donde sgn es la función signo definida en (4.4). Es decir, los paralelos son rectilíneos y los meridianos son circunferencias, concéntricas pues $|f(z) - B| = |A| \exp(c\lambda)$.

Las condiciones (4.1) establecen que el eje X es la imagen del paralelo $q = b$ y que la circunferencia imagen del meridiano $\lambda = a$ es tangente al eje Y en el origen. Dichas condiciones implican que

$$B = -Ae^{cz_0} \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} A = \begin{cases} -cb, & \text{si } c > 0 \\ \pi - cb, & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Si llamamos $k = |A| > 0$, entonces la forma canónica de la transformación es

$$\boxed{f(z) = \operatorname{sgn}(c)k [e^{c(z-ib)} - e^{ca}],} \quad (4.7)$$

que proporciona las ecuaciones canónicas:

$$\begin{cases} X = \operatorname{sgn}(c)k (e^{c\lambda} \cos [c(q-b)] - e^{ca}) \\ Y = \operatorname{sgn}(c)k e^{c\lambda} \sin [c(q-b)]. \end{cases} \quad (4.8)$$

Se calcula

$$f'(z) = k|c|e^{c\lambda}e^{ic(q-b)}$$

y se deduce que la función característica es

$$m(z) = (k|c|)^{-1} e^{-c\lambda},$$

luego k y c son las constantes fundamentales de las proyecciones pseudopolares. También se concluye que

$$r\sigma = k|c|e^{c\lambda} \quad \text{y} \quad \gamma = c(q-b). \quad (4.9)$$

Meridianos y paralelos. Sus ecuaciones son, en virtud de (4.8):

$$(X + \operatorname{sgn}(c)ke^{ca})^2 + Y^2 = (ke^{c\lambda})^2$$

e

$$Y = \operatorname{tg}[c(q - b)](X + \operatorname{sgn}(c)ke^{ca}),$$

respectivamente. Se deduce que

$$f(z) = -\operatorname{sgn}(c)ke^{ca} \quad (4.10)$$

es el centro de las circunferencias que representan los meridianos, y también el punto donde concurren las rectas que representan los paralelos.

Las proyecciones pseudopolares están gobernadas, excepto semejanza directa, por la función $\exp(cz)$. Según la Sección 1.4, $w = \exp z$, con $z = u + iv$, transforma de manera biyectiva la banda $-\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi$ en el plano w perforado —véase las figuras 1.10 y 1.11—. Entonces $\exp(cz)$ es biyectiva en la banda $-\pi|c|^{-1} \leq \operatorname{Im} z < \pi|c|^{-1}$. La forma canónica (4.7) está expresada en términos de $\exp[c(z - ib)]$, con $z = \lambda + iq$. Se concluye que $f(z)$ es biyectiva en el rectángulo

$$-\pi \leq \lambda < \pi, \quad -\pi|c|^{-1} \leq q - b < \pi|c|^{-1},$$

dibujado en la figura 4.6. Este rectángulo se transforma en una corona circular centrada en el punto definido por (4.10). Las imágenes de los paralelos

$$q = b - \pi|c|^{-1} \quad \text{y} \quad q = b + \pi|c|^{-1}$$

son las orillas inferior y superior, respectivamente, del segmento del eje X limitado por los puntos

$$-\operatorname{sgn}(c)k(e^{\pi c} + e^{ca}) \quad \text{y} \quad -\operatorname{sgn}(c)k(e^{-\pi c} + e^{ca}).$$

El valor absoluto de la diferencia de estos dos valores es $2k \sinh(\pi|c|)$, magnitud que expresa la amplitud radial de la corona circular.

La constante b determina el paralelo central de la región en que $f(z)$ es biyectiva, y la constante c establece la amplitud en latitud de dicha región: $2\pi|c|^{-1}$. El signo de c influye en la orientación de las circunferencias que representan los meridianos. En efecto, el centro de las circunferencias es $-\operatorname{sgn}(c)k \exp(ca)$, según (4.10). Además, (4.9) señala que si $q > b$, el signo de γ coincide con el de c . Véase la figura 4.7.

Mapas. Para facilitar la construcción de mapas vamos a determinar las proyecciones pseudopolares que transforman la región del elipsoide terrestre

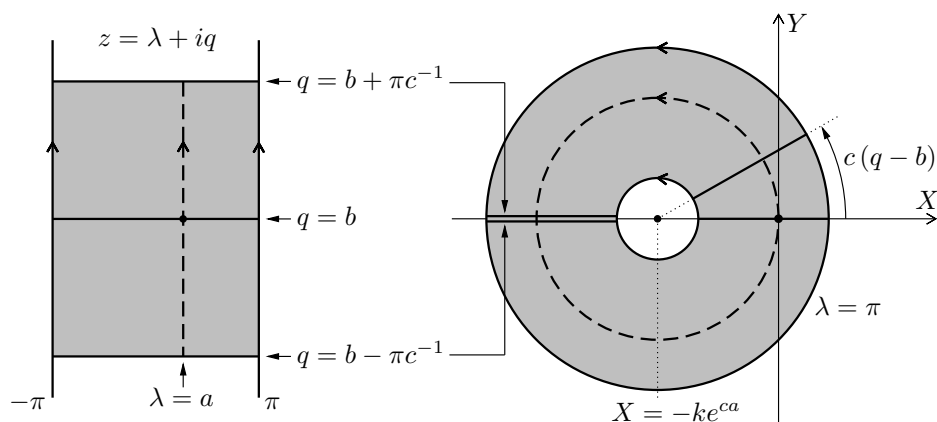


Fig. 4.6. Transformación $f(z)$ en las proyecciones pseudopolares. En esta figura, $c > 0$.

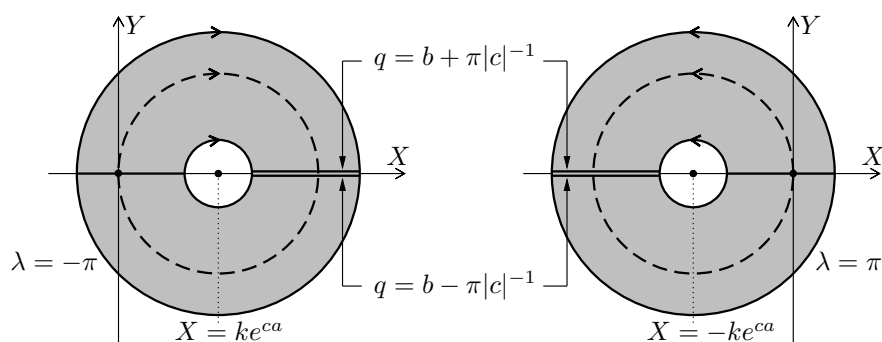


Fig. 4.7. Diferencias en la transformación $f(z)$ según el signo de c . A la izquierda $c < 0$, a la derecha $c > 0$. En ambos casos $f(a + ib) = 0$.

limitada por dos paralelos cualesquiera en un sector de corona circular fijado por nosotros.

Para simplificar suponemos c positivo. Consideremos, en el plano z , el rectángulo —figura 4.8—:

$$|\operatorname{Re} z| \leq \pi, \quad q_0 \leq \operatorname{Im} z \leq q_1,$$

donde q_0 y q_1 son las latitudes isométricas de dos paralelos fijados previamente. Sabemos que $f(z)$, expresada en (4.7), transforma estos paralelos en sendos segmentos rectilíneos que forman ángulos:

$$c(q_0 - b) = \theta_0 \quad \text{y} \quad c(q_1 - b) = \theta_1. \quad (4.11)$$

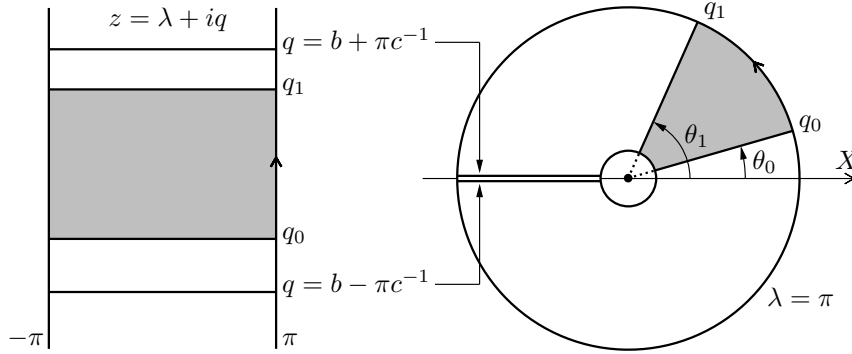


Fig. 4.8. Construcción de un mapa, en las proyecciones pseudopolares, a partir de q_0 , q_1 , θ_0 y θ_1 . En esta figura, $c > 0$.

La forma del sector de corona circular determinado por las imágenes de los paralelos q_0 y q_1 depende de estos ángulos, es decir, de b y c .

Supongamos que nosotros fijamos dos ángulos θ_0 y θ_1 en $[-\pi, \pi]$, con $\theta_0 < \theta_1$. Podemos plantear (4.11) como un sistema de ecuaciones con incógnitas b y c . Al resolverlo obtenemos:

$$b = \frac{\theta_1 q_0 - \theta_0 q_1}{\theta_1 - \theta_0} \quad \text{y} \quad c = \frac{\theta_1 - \theta_0}{q_1 - q_0}. \quad (4.12)$$

Se comprueba que $b - \pi c^{-1} \leq q_0$ y $b + \pi c^{-1} \geq q_1$. Se concluye que las constantes b y c , expresadas en (4.12), están asociadas con las proyecciones pseudopolares que transforman la región limitada por dos paralelos q_0 y q_1 en el sector de corona circular determinado por θ_0 y θ_1 .

El siguiente ejemplo es una aplicación de lo anterior para crear un mapa de Europa. Consideremos, en la esfera, $q_0 = 0.55$ y $q_1 = 1.74$, que se corresponden con $\varphi_0 = 30^\circ$ y $\varphi_1 = 70^\circ$. Definimos los ángulos $\theta_0 = -\pi/6$ y $\theta_1 = \pi/6$. En virtud de (4.12), obtenemos $b = 1.15$ y $c = 0.88$. Si suponemos que $k = 1$ y $a = 0$, entonces, según (4.7),

$$f(z) = e^{0.88(z-1.15i)} - 1.$$

Esta proyección pseudopolar representa la región $\{(\lambda, \varphi) : 30^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ\}$ en el sector de corona circular determinado por θ_0 y θ_1 . El paralelo $q = b$, que está contenido en el eje X , corresponde a $\varphi = 2 \arctg(\exp b) - \pi/2 = 55^\circ$. Véase la figura 4.9.

Otra forma de construir mapas es otorgar valores a las constantes a , b , c y k . Las figuras 4.10 y 4.11 son una muestra.

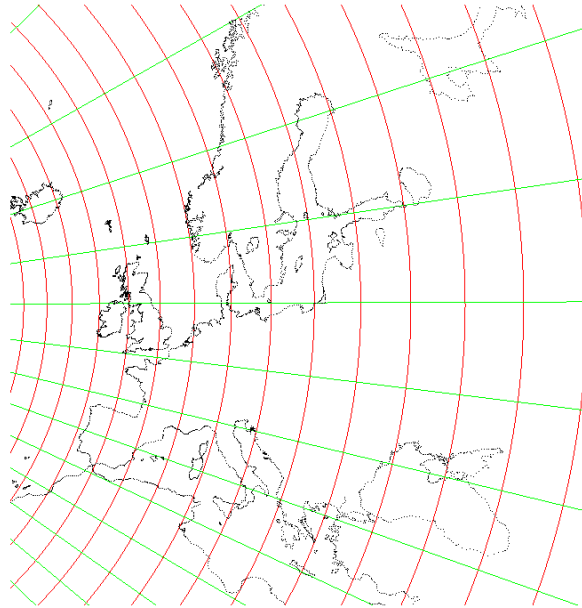


Fig. 4.9. Proyección pseudopolar; $k = 1$, $a = 0$, $b = 1.15$ y $c = 0.88$. Mapa de Europa. La red de meridianos y paralelos tiene 5 grados.

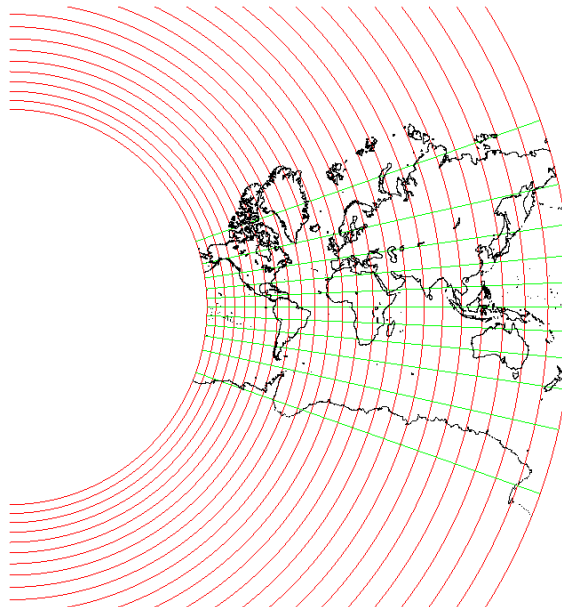


Fig. 4.10. Proyección pseudopolar; $k = 1$, $a = b = 0$, $c = 1/6$, $f(z) = \exp(z/6) - 1$. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

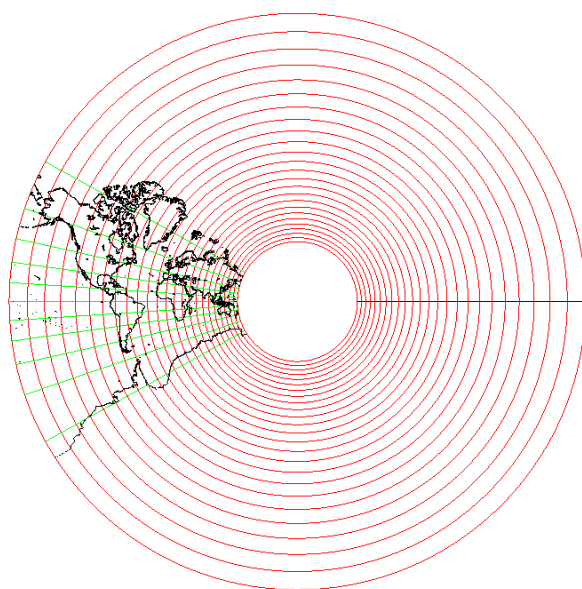


Fig. 4.11. Proyección pseudopolar; $k = 1$, $a = b = 0$, $c = -1/4$, $f(z) = 1 - \exp(-z/4)$. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

Capítulo 5

Proyecciones unipolares

Según establecimos en el Capítulo 3, las proyecciones de Lagrange circulares están compuestas por tres familias: unipolares, de Lagrange-Lambert y apolares. Aquí analizamos las proyecciones unipolares, que están asociadas con la transformación de Lagrange

$$f(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad C \neq 0, \quad AD - BC \neq 0. \quad (5.1)$$

5.1. Ecuaciones canónicas

Supongamos que en la transformación (5.1) las constantes A , B , C y D están fijadas. Vamos a obtener la *forma canónica* de (5.1), es decir, vamos a expresar $f(z)$ en el sistema de referencia intrínseco, que se define más adelante. Esto da lugar a las *ecuaciones canónicas* de la proyecciones unipolares.

Expresamos (5.1) así:

$$f(z) = \frac{AC^{-1}z + BC^{-1}}{z + DC^{-1}}.$$

Introducimos los números

$$k = |C^{-2}(AD - BC)| > 0 \quad \text{y} \quad z_0 = a + ib = -DC^{-1}.$$

Entonces la función característica es

$$m(z) = |f'(z)|^{-1} = k^{-1}|z - z_0|^2 = k^{-1}[(\lambda - a)^2 + (q - b)^2].$$

Las curvaturas de las imágenes de los meridianos y los paralelos son, respectivamente,

$$\kappa_1 = -m_\lambda = -2k^{-1}(\lambda - a) \quad \text{y} \quad \kappa_2 = m_q = 2k^{-1}(q - b). \quad (5.2)$$

Extraemos dos conclusiones.

1. El paralelo $q = b$ es el único paralelo que se transforma en una recta. Lo llamamos *paralelo principal de la proyección*, y su valor es

$$b = -\operatorname{Im}(DC^{-1}) \in \mathbb{R}.$$

2. La imagen de $\lambda = a$, con

$$a = -\operatorname{Re}(DC^{-1}) \in \mathbb{R},$$

es una recta que llamamos *eje de la proyección*. Si este eje corresponde a un meridiano terrestre, es decir, si $|a| \leq \pi$, entonces denominamos *principal* a dicho meridiano.

El eje de la proyección y la imagen del paralelo principal son rectas ortogonales —véase la figura 5.1—, porque $f(z)$ es una transformación conforme del plano ampliado sobre sí mismo [Silverman, 1975, § 11.1]. Llamamos *centro de la proyección* al punto donde se cortan dichas rectas. Este punto es AC^{-1} , la imagen del punto del infinito, debido al siguiente resultado.

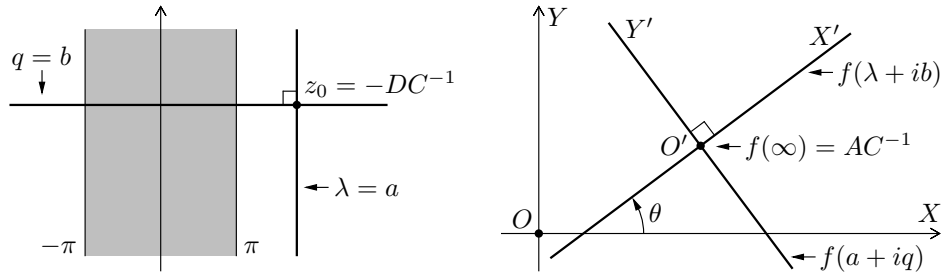


Fig. 5.1. Obtención de la forma canónica de las proyecciones unipolares. A la izquierda $z = \lambda + iq$; a la derecha $f(z) = X + iY = (Az + B)/(Cz + D)$.

Proposición 5.1. Sea $f(z) = (Az+B)/(Cz+D)$, con $C \neq 0$ y $AD-BC \neq 0$, una transformación racional lineal. Entonces:

1. Una recta que contiene a $z = -DC^{-1}$ se transforma en una recta que pasa por AC^{-1} .
2. Una recta que no contiene a $z = -DC^{-1}$ se transforma en una circunferencia que pasa por AC^{-1} .

Demostración. Cualquier recta del plano complejo contiene el punto del infinito. La función $f(z)$ transforma

$$\begin{aligned} z = -DC^{-1} &\longmapsto \infty \\ z = \infty &\longmapsto AC^{-1} \end{aligned}$$

Por tanto la imagen de una recta es una recta o una circunferencia (propiedad de las transformaciones racionales lineales) que pasa por AC^{-1} . La diferencia reside en que la recta contenga o no a $z = -DC^{-1}$. ■

De esta proposición se deduce que, en las proyecciones unipolares, los paralelos $q \neq b$ y los meridianos $\lambda \neq a$ se transforman en circunferencias que pasan por el centro de la proyección.

Observación. Los polos norte y sur terrestres se representan en el mismo punto: el centro de la proyección. En efecto, para todo λ se tiene que

$$\lim_{q \rightarrow \pm\infty} f(\lambda + iq) = \lim_{q \rightarrow \pm\infty} \frac{AC^{-1}\lambda + BC^{-1} + iAC^{-1}q}{\lambda + DC^{-1} + iq} = AC^{-1}.$$

Esto justifica la denominación *proyección unipolar*.

Sea $R = \{O ; X, Y\}$ el sistema de referencia propio de $f(z)$, mostrado en la figura 5.1. Introducimos el sistema $R' = \{O' ; X', Y'\}$ definido por:

$$\begin{cases} \text{eje real } X': \text{imagen del paralelo principal, } q = b, \\ \text{eje imaginario } Y': \text{eje de la proyección, imagen de } \lambda = a, \\ \text{origen } O': \text{centro de la proyección, } f(\infty) = AC^{-1}. \end{cases}$$

La forma canónica se obtiene al expresar $f(z)$ en el sistema de referencia intrínseco R' . Esta operación se realiza en dos pasos: traslación hasta O y giro según el ángulo $-\theta$, donde

$$\theta = \text{Arg } f'(\lambda + ib) = \text{Arg } \frac{C^{-2}(AD - BC)}{(\lambda - a)^2}$$

es el ángulo que forma la imagen del paralelo principal con el eje X . Se deduce que

$$C^{-2}(AD - BC) = ke^{i\theta}.$$

Por tanto la traslación y el giro proporcionan la función

$$e^{-i\theta} (f(z) - AC^{-1}) = e^{-i\theta} \frac{C^{-2}(BC - AD)}{z - z_0} = \frac{k}{z_0 - z}.$$

Las componentes real e imaginaria de esta función son las coordenadas de la imagen de (λ, q) en la referencia R' , que se convierte en la única y principal. Esto permite enunciar el siguiente resultado.

Proposición 5.2. Dada la transformación $(Az + B)/(Cz + D)$, con $C \neq 0$ y $AD - BC \neq 0$, asociada con una proyección unipolar, su forma canónica es

$$\boxed{f(z) = X + iY = \frac{k}{z_0 - z},} \quad (5.3)$$

donde $k = |C^{-2}(AD - BC)| > 0$ y $z_0 = a + ib = -DC^{-1}$. La imagen de $q = b$ es el eje X y la de $\lambda = a$ es el eje Y . Los polos norte y sur terrestres se representan en el origen de coordenadas, que es el centro de la proyección.

Observación. La pre-schwarziana de $T(z) = (Az + B)/(Cz + D)$, con $C \neq 0$ y $AD - BC \neq 0$, es

$$P(T) = \frac{-2C}{Cz + D} = \frac{2C^2}{AD - BC} (T(z) - AC^{-1}).$$

En la forma canónica (5.3) se tiene que $C = -1$ y $D = z_0$, luego

$$P(f) = \frac{2}{z_0 - z}, \quad \text{para todo } k. \quad (5.4)$$

En particular, la función $g(z) = (z_0 - z)^{-1}$, representante de la forma canónica, es solución de la ecuación $P(g) = 2g$.

La función característica de las proyecciones unipolares, asociadas con la forma canónica (5.3), es

$$m(z) = k^{-1}|z_0 - z|^2 = k^{-1}[(\lambda - a)^2 + (q - b)^2], \quad (5.5)$$

luego todas las constantes: a , b y k , son fundamentales, y las curvaturas κ_1 y κ_2 coinciden con (5.2). En virtud de (5.4) y de la identidad (2.23), $mP(f) = \kappa_1 + i\kappa_2$, obtenemos

$$X + iY = \frac{k}{2m} (\kappa_1 + i\kappa_2).$$

Por tanto las ecuaciones canónicas son:

$$\begin{cases} X = -k \frac{\lambda - a}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2} \\ Y = k \frac{q - b}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Observación. El distinto factor constante que tienen las ecuaciones (5.6) y (3.21) se debe a la elección de la unidad como factor constante de la función m en la Sección 3.3, mientras que en el presente capítulo la forma canónica conduce al factor constante k^{-1} en (5.5).

La escala infinitesimal es

$$r\sigma = \frac{k}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2},$$

pues $m r \sigma = 1$, según (2.10). A partir de (2.52): $\cos \gamma + i \sin \gamma = m f'(z)$, se obtiene la convergencia de meridianos de las proyecciones unipolares:

$$\cos \gamma = \frac{(\lambda - a)^2 - (q - b)^2}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2} \quad \text{y} \quad \sin \gamma = \frac{-2(\lambda - a)(q - b)}{(\lambda - a)^2 + (q - b)^2}. \quad (5.7)$$

Finalmente, la función inversa de la forma canónica $w = k(z_0 - z)^{-1}$ es $z = -kw^{-1} + z_0$. Entonces la longitud y la latitud, en función de las coordenadas cartesianas de un punto del mapa, son:

$$\lambda = -k \frac{X}{X^2 + Y^2} + a \quad \text{y} \quad q = k \frac{Y}{X^2 + Y^2} + b. \quad (5.8)$$

5.2. Meridianos, paralelos y loxodromas. Mapas

En las proyecciones unipolares, asociadas con la forma canónica (5.3), las imágenes de los meridianos, paralelos y loxodromas son rectas o circunferencias que pasan por el origen de coordenadas. En efecto, estas curvas son rectas en el plano z , y la Proposición 5.1 establece que cualquier recta se transforma en una recta o una circunferencia según contenga o no a $z_0 = a + ib$. Dicha recta o circunferencia pasa por el centro de la proyección, que, en la forma canónica, es el origen de coordenadas.

Primero obtengamos la ecuación que represente conjuntamente la imagen de cualquier meridiano, paralelo o loxodroma. En el plano z , la recta que pasa por un punto (λ_0, q_0) y forma un ángulo θ con el eje real se expresa como

$$\lambda \sin \theta - q \cos \theta - D = 0, \quad (5.9)$$

con $D = \lambda_0 \sin \theta - q_0 \cos \theta$. Al sustituir (5.8) en esta ecuación, obtenemos

$$A(X^2 + Y^2) + BX + CY = 0, \quad (5.10)$$

donde $A = (\lambda_0 - a) \sin \theta - (q_0 - b) \cos \theta$, $B = k \sin \theta$ y $C = k \cos \theta$. La ecuación (5.10) es la que buscábamos y representa, en efecto, una recta, si $A = 0$, o una circunferencia, si $A \neq 0$, que pasan por el origen. Analicemos cada caso.

La condición $A = 0$ equivale a $a \sin \theta - b \cos \theta - D = 0$, es decir, a que $z_0 = a + ib$ pertenezca a la recta (5.9). Por tanto la imagen de la recta que pasa por z_0 y forma un ángulo θ con el eje real es, según (5.10), la recta

$$X \sin \theta + Y \cos \theta = 0, \quad (5.11)$$

como muestra la figura 5.2. Los casos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ indican que las rectas $q = b$ y $\lambda = a$ se transforman en los ejes X e Y , respectivamente, como ya sabíamos.

En el caso $A \neq 0$, se deduce del párrafo anterior que la recta (5.9) no contiene a z_0 . Su imagen es la circunferencia (5.10). Si llamamos (X_0, Y_0) a su centro y R a su radio, su ecuación se expresa así:

$$X^2 + Y^2 - 2X_0X - 2Y_0Y = 0, \quad \text{con } R^2 = X_0^2 + Y_0^2,$$

pues la circunferencia debe pasar por el origen. Por tanto $X_0 = -B(2A)^{-1}$ e $Y_0 = -C(2A)^{-1}$, es decir:

$$\begin{cases} X_0 = \frac{k}{2} \frac{\sin \theta}{(q_0 - b) \cos \theta - (\lambda_0 - a) \sin \theta} \\ Y_0 = \frac{k}{2} \frac{\cos \theta}{(q_0 - b) \cos \theta - (\lambda_0 - a) \sin \theta}. \end{cases} \quad (5.12)$$

y

$$R = \frac{k}{2} |(q_0 - b) \cos \theta - (\lambda_0 - a) \sin \theta|^{-1}. \quad (5.13)$$

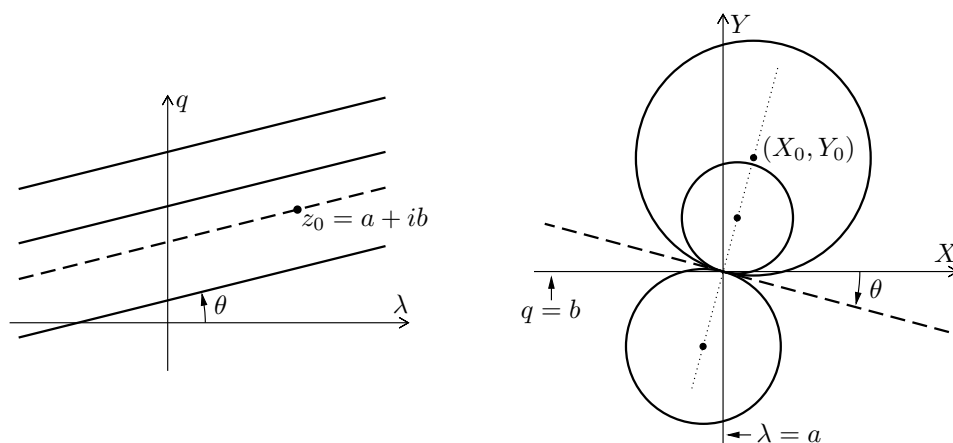


Fig. 5.2. Imágenes de las rectas que forman un ángulo θ con el eje real, en las proyecciones unipolares, asociadas con $f(z) = k(z_0 - z)^{-1}$.

Las coordenadas del centro (X_0, Y_0) satisfacen la ecuación

$$X \cos \theta - Y \sin \theta = 0, \quad (5.14)$$

que solo depende de θ . Entonces el haz de rectas paralelas a la recta (5.9) se transforma en el haz de circunferencias que pasan por el origen y cuyos centros están contenidos en la recta (5.14). Se deduce que dichas circunferencias son tangentes en el origen a la recta perpendicular a (5.14): $X \sin \theta + Y \cos \theta = 0$, que es, según (5.11), la imagen de la recta que pasa por z_0 . Véase la figura 5.2.

Meridianos y paralelos

Si se considera $\theta = \pi/2$ en (5.12) y en (5.13), se obtiene la ecuación del meridiano $\lambda \neq a$:

$$\left[X + \frac{k}{2(\lambda - a)} \right]^2 + Y^2 = \left[\frac{k}{2(\lambda - a)} \right]^2. \quad (5.15)$$

Si $\theta = 0$, entonces la ecuación de los paralelos $q \neq b$ es

$$X^2 + \left[Y - \frac{k}{2(q - b)} \right]^2 = \left[\frac{k}{2(q - b)} \right]^2. \quad (5.16)$$

Obsérvese que los radios de los meridianos y los paralelos son, respectivamente, $|\kappa_1|^{-1}$ y $|\kappa_2|^{-1}$ en (5.2).

Según (5.15), los meridianos $\lambda \neq a$ se transforman en la familia de circunferencias tangentes en el origen al eje de la proyección (eje Y). Este eje corresponde al meridiano principal si $|a| \leq \pi$, como muestra la figura 5.3. La orientación de los meridianos, mostrada en dicha figura, se deduce de que $\gamma(\lambda, b) = 0$, para todo λ , en virtud de (5.7).

Los paralelos $q \neq b$ se transforman, según (5.16), en la familia de arcos de circunferencias tangentes en el origen al eje X , imagen del paralelo principal $q = b$. Los extremos de los arcos descansan en las imágenes de los meridianos $\lambda = \pm\pi$, como muestra la figura 5.4. La región $q > b$ corresponde al semiplano superior $Y > 0$, y $q < b$ al inferior.

Mapas

A la luz del examen realizado sobre los meridianos y los paralelos, hemos otorgado valores oportunos a las constantes fundamentales a , b y k para construir tres mapas de las proyecciones unipolares. Las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 muestran dichos mapas, asociados con la forma canónica $f(z) = k(z_0 - z)^{-1}$.

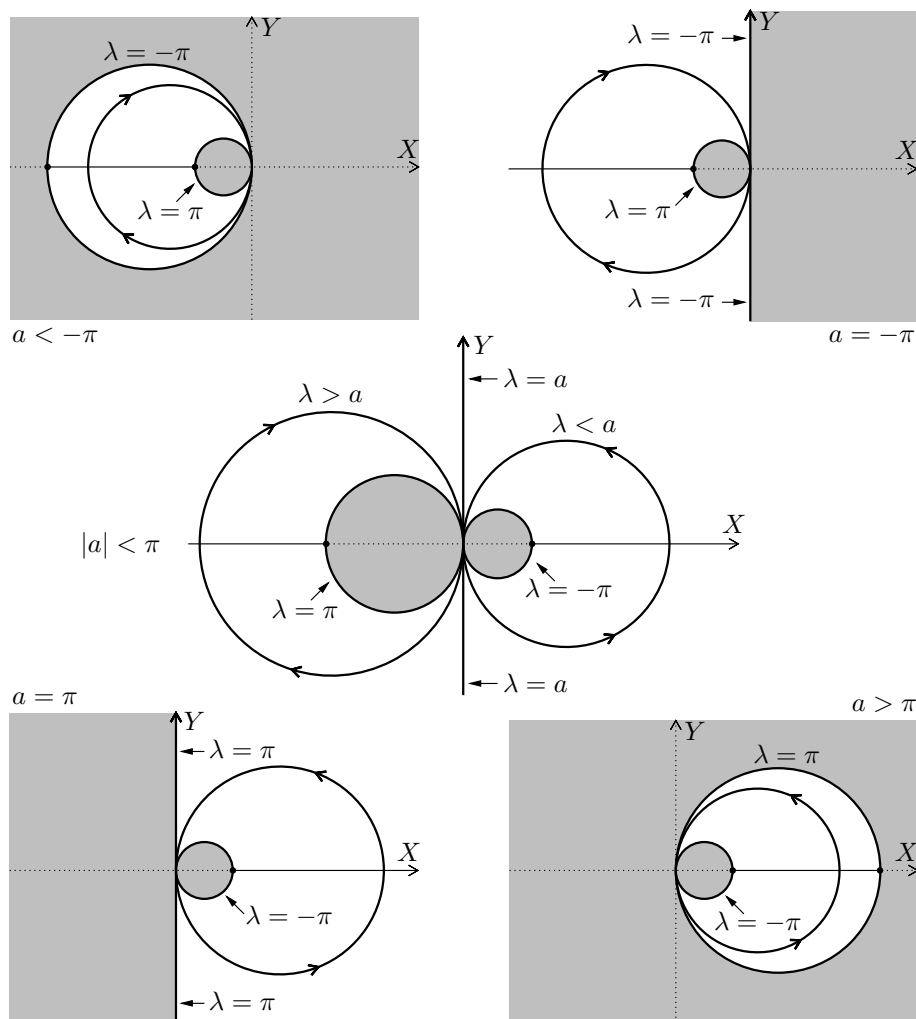


Fig. 5.3. Imágenes de los meridianos en las proyecciones unipolares, según el valor de a .

Loxodromas

Hemos demostrado anteriormente —véase la figura 5.2— que la imagen de una loxodroma que forma un ángulo θ con los paralelos es:

- La recta (5.11): $X \sin \theta + Y \cos \theta = 0$, si la loxodroma pasa por el punto $z_0 = a + ib$.
- La circunferencia $X^2 + Y^2 - 2X_0X - 2Y_0Y = 0$, con centro (X_0, Y_0) y radio R expresados por (5.12) y (5.13), si la loxodroma no pasa por z_0 .

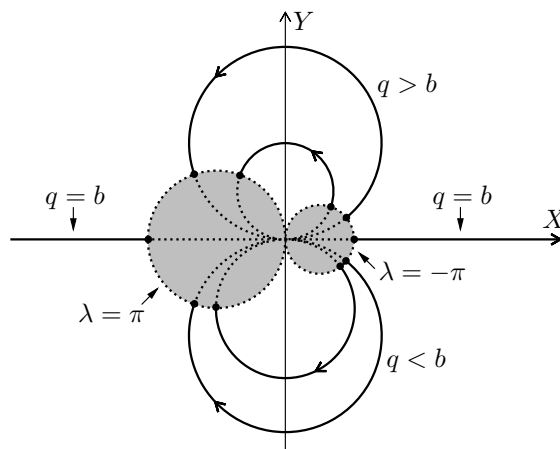


Fig. 5.4. Imágenes de los paralelos en las proyecciones unipolares.

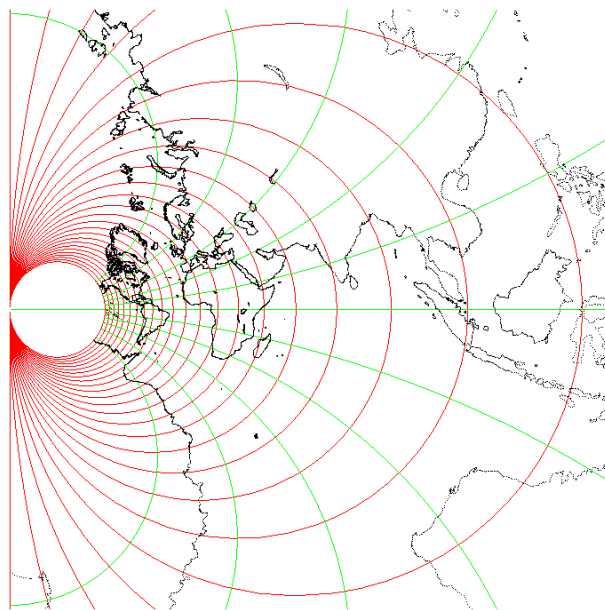


Fig. 5.5. Proyección unipolar $f(z) = (\pi - z)^{-1}$. El meridiano principal es $\lambda = \pi$; el paralelo principal es el ecuador. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

La curvatura de la imagen de una loxodroma es (2.9): $K = \kappa_1 \sen \theta + \kappa_2 \cos \theta$. Los valores de κ_1 y κ_2 en (5.2) proporcionan dicha curvatura en las proyecciones unipolares:

$$K = \frac{2}{k} [(q - b) \cos \theta - (\lambda - a) \sen \theta].$$

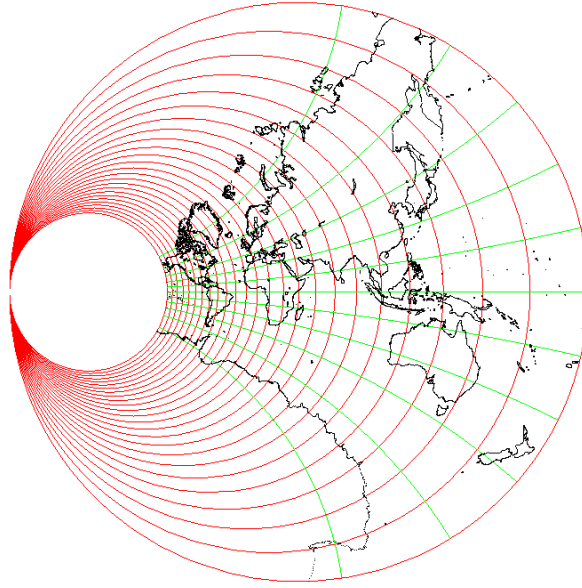


Fig. 5.6. Proyección unipolar $f(z) = (7\pi/4 - z)^{-1}$. No existe meridiano principal; el paralelo principal es el ecuador. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

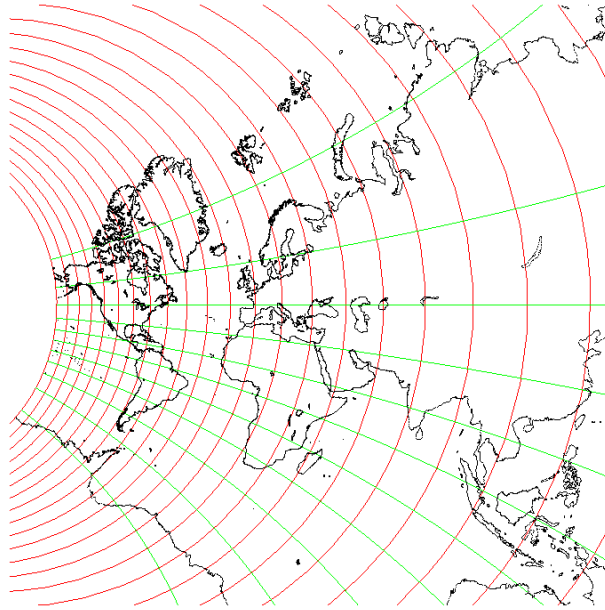


Fig. 5.7. Proyección unipolar $f(z) = (7\pi/4 + i0.88 - z)^{-1}$. No existe meridiano principal; el paralelo principal, $q = 0.88$, corresponde a $\varphi = \pi/4$. La red de meridianos y paralelos tiene 15 grados.

Obsérvese que $R = |K|^{-1}$, en virtud de (5.13).

Ejemplo. Sea la proyección unipolar asociada con $f(z) = (7\pi/4 - z)^{-1}$, cuyo mapa recoge la figura 5.6. Se tiene que $z_0 = a + ib = 7\pi/4$. Consideremos dos loxodromas que, en el plano z , correspondan con sendas rectas paralelas que formen ángulo $\theta = \pi/4$ con los paralelos. Supongamos que una de ellas pasa por $(\lambda_0, \varphi_0) = (-3^\circ, 40^\circ)$, y que la otra pasa por z_0 . Entonces la primera se transforma en la circunferencia con centro y radio:

$$X_0 = [2(q_0 - \lambda_0 + a)]^{-1}, \quad Y_0 = X_0 \quad \text{y} \quad R = \sqrt{2} |X_0|,$$

donde $q_0 = \log \operatorname{tg}(13\pi/36)$ en la esfera, luego $X_0 = 0.0792$. La loxodroma que pasa por z_0 se transforma en la recta $Y = -X$. Véanse las figuras 5.8 y 5.9. ■

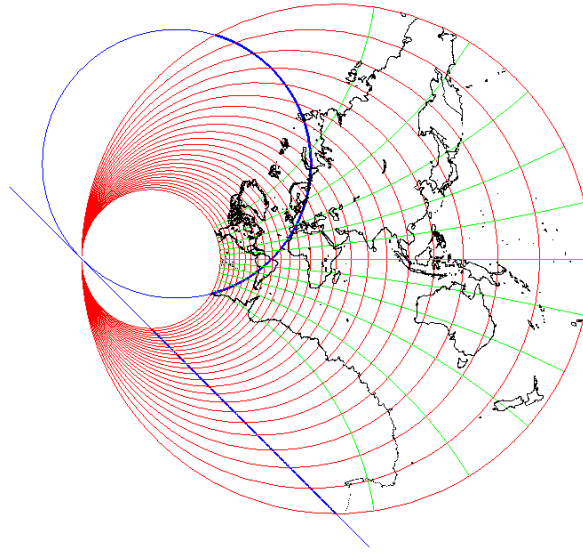


Fig. 5.8. Imágenes de dos loxodromas (circunferencia y recta) en la proyección unipolar asociada con $f(z) = (7\pi/4 - z)^{-1}$. Las dos cortan a los meridianos en 45 grados.

5.3. Utilidad en cartografía

Las proyecciones unipolares pueden emplearse para aproximar localmente una proyección conforme. En efecto, el siguiente resultado [Carne, 1990, § 2] establece que existe una transformación racional lineal que aproxima una función analítica $f(z)$ en un punto en el sentido que coincide con f hasta la

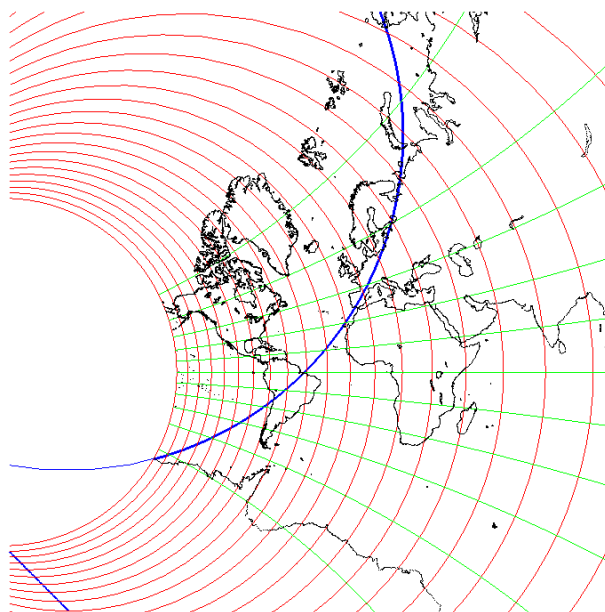


Fig. 5.9. Detalle de la figura 5.8.

segunda derivada en dicho punto. La diferencia en la tercera derivada está determinada por la schwarziana de f —véase la Sección 2.4—.

En adelante identificamos una transformación racional lineal

$$T(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad AD - BC = 1, \quad (5.17)$$

con la matriz

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \det T = 1. \quad (5.18)$$

Esta matriz está determinada excepto multiplicación por $\pm I$. Cualquier transformación racional lineal $(az + b)/(cz + d)$, con $ad - bc \neq 0$, se expresa en la forma (5.17) si se multiplica los cuatro coeficientes por $(ad - bc)^{-1/2}$.

Proposición 5.3. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un dominio plano D . Para cada $z \in D$ con $f'(z) \neq 0$, la transformación racional lineal

$$T = \frac{1}{2f'^{3/2}} \begin{bmatrix} 2f'^2 - ff'' & 2ff' - z(2f'^2 - ff'') \\ -f'' & 2f' + zf'' \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

donde f y sus derivadas están evaluadas en z , aproxima f en z en el sentido:

$$T(z) = f(z), \quad T'(z) = f'(z) \quad \text{y} \quad T''(z) = f''(z). \quad (5.20)$$

Además, $\det T = 1$ y la tercera derivada en z satisface:

$$\frac{f''' - T'''}{f'} = S(f).$$

Demostración. Sea T una transformación racional lineal definida por (5.18). Dado $z \in D$ con $f'(z) \neq 0$, imponemos a T las condiciones (5.20) en z :

$$\frac{Az + B}{Cz + D} = f, \quad \frac{1}{(Cz + D)^2} = f' \quad \text{y} \quad \frac{-2C}{(Cz + D)^3} = f''.$$

Estas junto con $AD - BC = 1$ componen un sistema de cuatro ecuaciones cuya solución es:

$$\begin{cases} A = f'^{-3/2} (2f'^2 - ff'') / 2 \\ B = f'^{-3/2} [2ff' - z(2f'^2 - ff'')] / 2 \\ C = -f'^{-3/2} f'' / 2 \\ D = f'^{-3/2} (2f' + zf'') / 2. \end{cases} \quad (5.21)$$

La tercera derivada de T , en el punto z en cuestión, es

$$T''' = \frac{6C^2}{(Cz + D)^4} = \frac{3}{2} \frac{f''^2}{f'}.$$

Se concluye que

$$\frac{f''' - T'''}{f'} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

El segundo miembro es, en virtud de (2.33), la schwarziana de f . ■

En la Sección 4.1 expusimos un resultado análogo a la Proposición 5.3 con transformaciones lineales. En ese caso la pre-schwarziana mide la desviación.

Las condiciones segunda y tercera en (5.20) señalan que la función característica y la pre-schwarziana de T coinciden con las respectivas de f , en el punto z donde T aproxima f :

$$m_T = m_f \quad \text{y} \quad P(T) = P(f).$$

Como se tiene la identidad (2.23): $mP(f) = \kappa_1 + i\kappa_2$ en proyecciones conformes, entonces el vector de curvaturas $\kappa_1 + i\kappa_2$ de la proyección unipolar asociada con T coincide, en z , con el de la proyección asociada con f .

En la Sección 5.1 establecimos que una proyección unipolar asociada con $(Az + B)/(Cz + D)$ tiene un paralelo principal y un eje determinados, respectivamente, por $q = b$ y $\lambda = a$, donde $a + ib = -DC^{-1}$. Sus imágenes son sendas rectas perpendiculares que se cortan en el punto AC^{-1} , centro de la proyección. En el caso de (5.19) se tiene que

$$a + ib = z + 2f'f''^{-1} \quad \text{y} \quad AC^{-1} = f - 2f'^2f''^{-1}. \quad (5.22)$$

Aproximación local de la transversa de Mercator

Apliquemos los resultados previos en el siguiente ejemplo. La proyección transversa de Mercator está asociada, en la esfera, con (2.50):

$$f(z) = \text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right).$$

Además, $f'(z) = 1/\cos z$ y $f''(z) = \sin z/\cos^2 z$. Obsérvese que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Vamos a obtener las respectivas proyecciones unipolares que aproximen la transversa de Mercator en los puntos $z = iq_0$ y $z = \pi/2 + iq_0$, donde $q_0 = \log \text{tg}(3\pi/8)$ corresponde con $\varphi_0 = \pi/4$. En el primero la schwarziana no se anula pero en el segundo sí lo hace. (En la Sección 4.1 obtuvimos la proyección cilíndrica conforme que aproxima la transversa de Mercator en $z = 0$.)

1. Aproximación en $z = iq_0$. Se tiene que

$$f(iq) = i\varphi, \quad f'(iq) = \cos \varphi \quad \text{y} \quad f''(iq) = i \cos \varphi \sin \varphi. \quad (5.23)$$

El primer valor se debe a que esta proyección conserva las distancias en el meridiano $\lambda = 0$. Los valores restantes se deducen de —véase las fórmulas de Euler (1.34)—:

$$\cos(iz) = \cosh z \quad \text{y} \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad (5.24)$$

y también de las relaciones $\sin \varphi = \text{tgh } q$ y $\cos \varphi = \text{sech } q$. Al hacer $q = q_0$ en (5.23), obtenemos

$$f = i\pi/4, \quad f' = \sqrt{2}/2 \quad \text{y} \quad f'' = i/2.$$

Por tanto la transformación racional lineal que aproxima f en iq_0 es, en virtud de (5.19):

$$T = 2^{-1/4} \begin{bmatrix} 1 + \pi/8 & i [\pi\sqrt{2}/4 - (1 + \pi/8) q_0] \\ -i/2 & \sqrt{2} - q_0/2 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Se comprueba que $\det T = 1$. A partir de (5.22) se halla

$$AC^{-1} = i(2 + \pi/4), \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b = q_0 - 2\sqrt{2}.$$

Entonces el centro de la proyección unipolar asociada con (5.25) es $i(2 + \pi/4)$, el meridiano principal es $\lambda = 0$ y el paralelo principal es $q = q_0 - 2\sqrt{2}$, que corresponde con -74 grados.

El vector de curvaturas de la transversa de Mercator en $(0, q)$ es

$$\kappa_1 + i\kappa_2 = mP(f) = i \operatorname{tg} \varphi,$$

debido a (5.23). Esto también se deduce de (2.53): $P(f) = \operatorname{tg} z$, porque

$$\operatorname{tg}(iq) = i \operatorname{tgh} q = i \operatorname{sen} \varphi, \quad (5.26)$$

según (5.24). Por tanto $\kappa_1 + i\kappa_2 = i$ en $z = iq_0$. Como demostramos anteriormente, este vector de curvaturas coincide con el de la proyección unipolar (5.25). Véase las figuras 5.10 y 5.11.

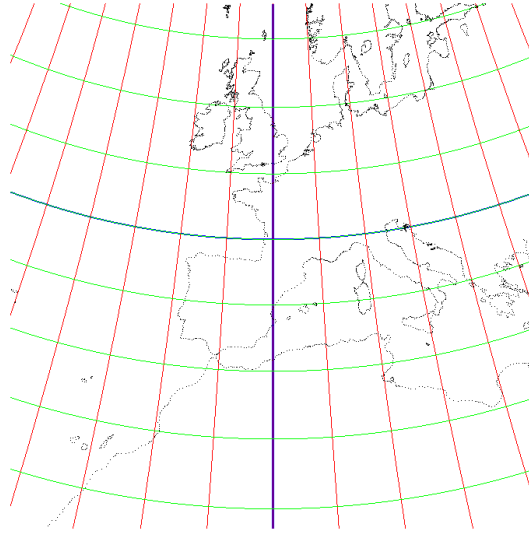


Fig. 5.10. Mapa de la proyección unipolar que aproxima la transversa de Mercator en $(\lambda, \varphi) = (0^\circ, 45^\circ)$. La red de meridianos y paralelos tiene 5 grados. En azul, el paralelo y el meridiano del punto en cuestión.

Según la Proposición 5.3, la tercera derivada en el punto en cuestión satisface

$$\frac{f''' - T'''}{f'} = S(f).$$

La schwarziana de la transversa de Mercator es (2.54):

$$S(f) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 z. \quad (5.27)$$

En virtud de (5.26) se tiene que

$$S(f)(iq) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

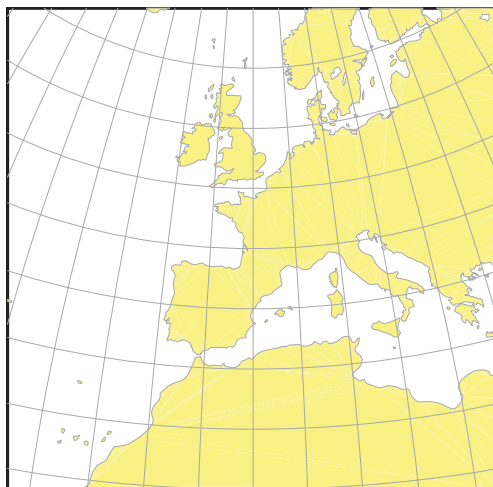


Fig. 5.11. Mapa de la proyección transversa de Mercator. La red de meridianos y paralelos tiene 5 grados.

Se comprueba que esta función alcanza el mínimo en $\varphi = \pm\pi/2$, $S(f) = 1/2$, y el máximo en $\varphi = 0$, $S(f) = 1$. En particular, $S(f)(iq_0) = 3/4$.

2. Aproximación en $z = \pi/2 + iq_0$. Se calcula

$$f(\pi/2 + iq) = \text{Log}[i \cotgh(q/2)], \quad \text{con } q \neq 0,$$

donde hemos utilizado [Markushevich, 1970, Capítulo 2, § 3.6]:

$$\cos(z + \pi/2) = -\sin z \quad \text{y} \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z, \quad (5.28)$$

y también (5.24). Es decir, $f(\pi/2 + iq) = \log \cotgh(q/2) + i\pi/2$, si $q > 0$. La identidad

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \text{tg}(x/2)}{1 - \text{tg}(x/2)}$$

junto con $\exp q = \text{tg}(\pi/4 + \varphi/2)$ permiten establecer la siguiente relación en la esfera:

$$\text{tgh} \frac{q}{2} = \frac{e^q - 1}{e^q + 1} = \text{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Entonces

$$f(\pi/2 + iq) = \log \text{tg}(\pi/2 - \varphi/2) + i\pi/2, \quad \text{con } q > 0.$$

En particular $f(\pi/2 + iq_0) = q_0 + i\pi/2$, pues $\varphi_0 = \pi/4$. Por otra parte,

$$f'(\pi/2 + iq) = i \cotg \varphi \quad \text{y} \quad f''(\pi/2 + iq) = -\cos \varphi / \sin^2 \varphi,$$

después de utilizar (5.28) y (5.24). Al hacer $q = q_0$ se obtiene

$$f' = i \quad \text{y} \quad f'' = -\sqrt{2}. \quad (5.29)$$

Por tanto la transformación racional lineal que aproxima f en $\pi/2 + iq_0$ es, en virtud de (5.19):

$$T = -\frac{1}{2}(1+i) \begin{bmatrix} q_0 - \sqrt{2} + i\pi/2 & i(2\sqrt{2}q_0 - q_0^2 - \pi^2/4) \\ 1 & -\pi/2 + i(\sqrt{2} - q_0) \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Se comprueba que $\det T = 1$. A partir de (5.22) se halla

$$AC^{-1} = q_0 - \sqrt{2} + i\pi/2, \quad a = \pi/2 \quad \text{y} \quad b = q_0 - \sqrt{2}.$$

Entonces el centro de la proyección unipolar asociada con (5.30) es el punto $q_0 - \sqrt{2} + i\pi/2$, el meridiano principal es $\lambda = \pi/2$ y el paralelo principal es $q = q_0 - \sqrt{2}$, que corresponde con -29 grados.

El vector de curvaturas de la transversa de Mercator en $(\pi/2, q_0)$ es, al tener en cuenta (5.29),

$$\kappa_1 + i\kappa_2 = mP(f) = i\sqrt{2},$$

y, según demostramos, coincide con el de la proyección unipolar (5.30). Véase las figuras 5.12 y 5.13.

El valor de la schwarziana es $S(f)(\pi/2 + iq_0) = 0$. En efecto,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\cos \lambda \operatorname{sen} \lambda + i \cosh q \operatorname{senh} q}{\cos^2 \lambda + \operatorname{senh}^2 q}, \quad (5.31)$$

luego $\operatorname{tg}(\pi/2 + iq_0) = i \operatorname{cotgh} q_0 = i \operatorname{cosec} \varphi_0 = i\sqrt{2}$. Al sustituir en (5.27) se obtiene el resultado referido.

Observación. La schwarziana de la transversa de Mercator (5.27) se anula solamente en los cuatro puntos

$$z = \pm\pi/2 \pm iq_0, \quad \text{es decir,} \quad (\lambda, \varphi) = (\pm 90^\circ, \pm 45^\circ),$$

donde $q_0 = \log \operatorname{tg}(3\pi/8)$. Para demostrarlo observamos primero que $S(f) = 0$ si y solo si $\operatorname{tg} z = \pm i\sqrt{2}$. En virtud de (5.31), $(\lambda, q) \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ debe satisfacer el sistema:

$$\frac{\cos \lambda \operatorname{sen} \lambda}{\cos^2 \lambda + \operatorname{senh}^2 q} = 0, \quad \frac{\cosh q \operatorname{senh} q}{\cos^2 \lambda + \operatorname{senh}^2 q} = \pm\sqrt{2}. \quad (5.32)$$

El denominador se anula solo en los puntos $(\lambda, q) = (\pm\pi/2, 0)$, que están excluidos del dominio de definición, porque

$$f(\pi/2) = \operatorname{Log} \operatorname{tg}(\pi/2) \quad \text{y} \quad f(-\pi/2) = \operatorname{Log} \operatorname{tg} 0,$$

y la función $\operatorname{Log} z$ está definida en cada número complejo distinto de cero y del infinito [Markushevich, 1970, Capítulo 2, § 5.4]. La primera ecuación en (5.32) se satisface si y solo si $\lambda \in \{0, \pm\pi/2, -\pi\}$. Si $\lambda \in \{0, -\pi\}$, entonces la segunda ecuación se convierte en $\operatorname{tgh} q = \pm\sqrt{2}$ que no tiene solución pues $\operatorname{tgh} q = \operatorname{sen} \varphi$. En el caso $\lambda = \pi/2$, la segunda ecuación equivale a $\operatorname{sen} \varphi = \pm\sqrt{2}/2$ cuyas soluciones son $\varphi = \pm\pi/4$. En el caso restante, $\lambda = -\pi/2$, se obtiene lo mismo.

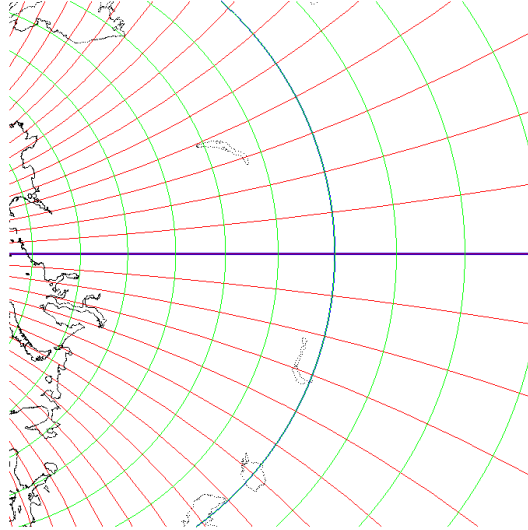


Fig. 5.12. Mapa de la proyección unipolar que aproxima la transversa de Mercator en $(\lambda, \varphi) = (90^\circ, 45^\circ)$. La red de meridianos y paralelos tiene 5 grados. En azul, el paralelo y el meridiano del punto en cuestión.

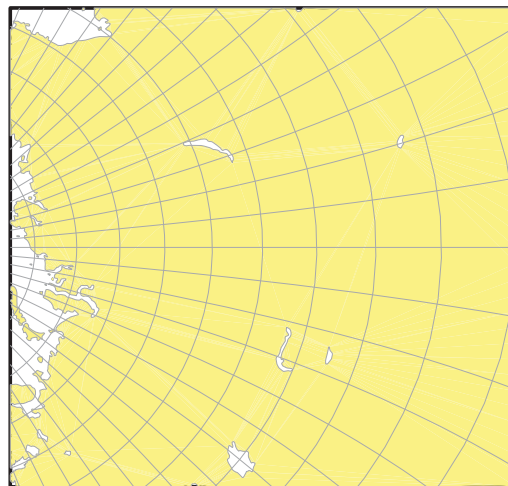


Fig. 5.13. Mapa de la proyección transversa de Mercator. La red de meridianos y paralelos tiene 5 grados.

Capítulo 6

Proyecciones de Lagrange-Lambert

Analizamos las dos familias restantes de proyecciones de Lagrange circulares: las proyecciones de Lagrange-Lambert y las proyecciones apolares, asociadas respectivamente con las transformaciones

$$f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D} \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{Ae^{cz} + B}{Ce^{cz} + D},$$

donde $c > 0$, $CD \neq 0$ y $AD - BC \neq 0$ en ambos casos. Véase la Sección 3.5.

6.1. Constantes fundamentales de las transformaciones bipolares de Lagrange

Decimos que una transformación conforme $f(z)$ es una *transformación bipolar de Lagrange* de exponente $c > 0$ si $S(f) = c^2/2$ y, para todo λ , los límites

$$w_n = \lim_{q \rightarrow +\infty} f(\lambda + iq) \quad \text{y} \quad w_s = \lim_{q \rightarrow -\infty} f(\lambda + iq)$$

no dependen de λ , son finitos y distintos. Denominamos a estos puntos *polos* de la transformación, y a la recta que los une *eje* de la misma.

En el Capítulo 3 demostramos que estas transformaciones son

$$L(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0. \quad (6.1)$$

Al hallar los límites de $L(z)$ cuando q tiende a $+\infty$ y $-\infty$, obtenemos que los polos son:

$$w_n = B/D \quad \text{y} \quad w_s = A/C,$$

puntos finitos y distintos. Si introducimos los números complejos no nulos:

$$k = \frac{1}{2}(w_n - w_s) = -\frac{AD - BC}{2CD} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{D}{C}, \quad (6.2)$$

entonces (6.1) se expresa así:

$$L(z) = 2k\beta \frac{1}{e^{icz} + \beta} + w_s. \quad (6.3)$$

La función $\exp(icz) : [-\pi c^{-1}, \pi c^{-1}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es biyectiva —consúltese la Sección 1.4—, luego existe un único $z_0 = a + ib \in [-\pi c^{-1}, \pi c^{-1}) \times \mathbb{R}$ tal que $\exp(icz_0) = \beta$, es decir,

$$ca = \text{Arg } \beta \quad \text{y} \quad cb = \log|\beta|^{-1}. \quad (6.4)$$

De este modo, (6.3) se convierte en

$$L(z) = 2k \frac{1}{e^{ic(z-z_0)} + 1} + w_s. \quad (6.5)$$

La función inversa de $w = L(z)$ se obtiene al despejar en (6.5):

$$e^{ic(z-z_0)} = \frac{w_n - w}{w - w_s}, \quad (6.6)$$

que tiene sentido para todo w distinto de w_s y w_n , porque la función

$$e^{ic(z-z_0)} : [a - \pi c^{-1}, a + \pi c^{-1}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

es biyectiva. Por tanto

$$z = L^{-1}(w) = z_0 - \frac{i}{c} \text{Log} \frac{w_n - w}{w - w_s}.$$

Llamamos

$$w_0 = L(z_0) = \frac{1}{2}(w_n + w_s) = \frac{AD + BC}{2CD}. \quad (6.7)$$

Observamos que la imagen de z_0 es el punto medio del segmento que une los polos w_s y w_n . Denominamos *centro de la transformación* al punto z_0 . Establecemos dos conclusiones —véase la figura 6.1—.

1. La imagen de $\lambda = a$ es el segmento rectilíneo que une los polos de la transformación. En efecto, si $w = L(a + iq)$ con $q \in \mathbb{R}$, entonces, en virtud de (6.5), se tiene que

$$w = w_s + [e^{-c(q-b)} + 1]^{-1} (w_n - w_s), \quad \text{con } 0 < [e^{-c(q-b)} + 1]^{-1} < 1.$$

Esta ecuación determina el segmento rectilíneo cuyos extremos son w_s y w_n [Hille, 1959, § 2.2]. Si este segmento corresponde a un meridiano terrestre, es decir, si $|a| \leq \pi$, entonces denominamos *principal* a dicho meridiano.

2. La imagen de $q = b$ pertenece a la mediatriz del segmento que une los polos w_s y w_n , porque si $w = L(\lambda + ib)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{ic(\lambda-a)} = \frac{w_n - w}{w - w_s},$$

en virtud de (6.6). Se deduce que $|w - w_s| = |w - w_n|$. Por esta razón llamamos *paralelo principal* a $q = b$.

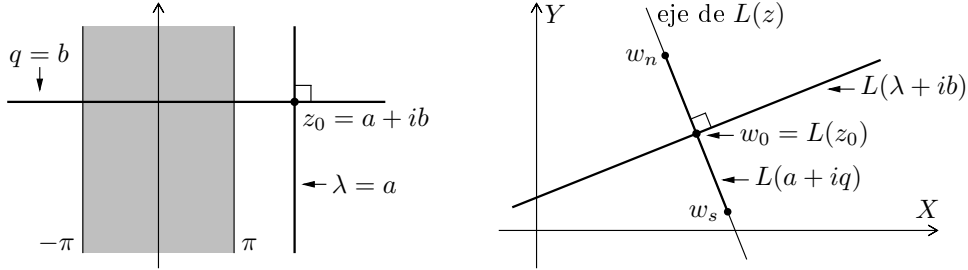


Fig. 6.1. Sistema de referencia, en las transformaciones bipolares de Lagrange, determinado por los polos w_s y w_n . A la izquierda $z = \lambda + iq$; a la derecha $L(z) = X + iY$.

El análisis realizado hasta aquí demuestra el siguiente resultado.

Teorema 6.1. *Una transformación bipolar de Lagrange de exponente $c > 0$ está definida por sus polos $\{w_s, w_n\} \subset \mathbb{C}$ y su centro $z_0 = a + ib \in [-\pi c^{-1}, \pi c^{-1}) \times \mathbb{R}$, y se expresa del siguiente modo:*

$$L(z) = 2k \frac{1}{e^{ic(z-z_0)} + 1} + w_s, \quad (6.8)$$

con $2k = w_n - w_s$. La transformación inversa es

$$L^{-1}(w) = z_0 - \frac{i}{c} \operatorname{Log} \frac{w_n - w}{w - w_s}.$$

Denominamos *proyección de Lagrange-Lambert* de exponente $c > 0$, polos $\{w_s, w_n\}$ y centro $z_0 = a + ib$ a la proyección conforme asociada con la función (6.8).

Observación. En (6.8), los elementos w_s , w_n y z_0 son arbitrarios o a nuestra elección. Las constantes más influyentes en la distorsión de las proyecciones de Lagrange-Lambert son $|w_n - w_s|$, a , b y c —véase el Capítulo 7—.

Si la transformación bipolar de Lagrange

$$L(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0,$$

está dada, su reducción a la forma (6.8) se realiza según hemos explicado:

$$w_n = B/D, \quad w_s = A/C \quad \text{y} \quad e^{icz_0} = D/C, \quad (6.9)$$

con $z_0 \in [-\pi c^{-1}, \pi c^{-1}) \times \mathbb{R}$.

Nota histórica. Según expusimos en la Sección 3.4, Lagrange [1779, § 10] resuelve la ecuación

$$\frac{g''}{g} = k, \quad \text{con } g = \frac{1}{\sqrt{f'}},$$

y obtiene la función —confróntese con (6.8)—:

$$f(z) = -\frac{1}{2M(Me^{2z\sqrt{k}} + N)\sqrt{k}} + G,$$

donde G , M y N son constantes complejas arbitrarias, $2\sqrt{k}$ corresponde al exponente c y la variable z representa nuestra iz .

Ejemplo. Consideremos la transformación bipolar de Lagrange

$$L(z) = \frac{e^{icz} + i}{ie^{icz} + 1}$$

de exponente $c > 0$ arbitrario. Se cumple que $CD = i$ y $AD - BC = 2$, valores no nulos. En virtud de (6.9), sus polos son $w_n = +i$ y $w_s = -i$, y su centro $z_0 = a + ib \in [-\pi c^{-1}, \pi c^{-1}) \times \mathbb{R}$ es tal que $\exp(icz_0) = -i$, es decir, $z_0 = -\pi/(2c)$. Según (6.2) y (6.7) se tiene que $k = i$ y $w_0 = L(z_0) = 0$. La imagen de $\lambda = -\pi/(2c)$ es el segmento que une los polos. Este segmento pertenece al eje de $L(z)$ —véase la figura 6.1— que en este caso coincide con el eje Y . El paralelo principal es el ecuador pues $b = 0$, y su imagen en este caso coincide con el eje X . El Teorema 6.1 establece que

$$L(z) = 2i \frac{1}{e^{ic[z+\pi/(2c)]} + 1} - i.$$

Esta función está asociada con la proyección de Lagrange-Lambert de exponente c , polos $\{-i, +i\}$ y centro $-\pi/(2c)$. ■

Para terminar esta sección obtenemos la función característica de las proyecciones de Lagrange-Lambert: $m(\lambda, q) = m(z) = |L'(z)|^{-1}$ y las curvaturas de los meridianos y de los paralelos.

Proposición 6.1. *Sea $L(z)$ una transformación bipolar de Lagrange de exponente $c > 0$, centro $z_0 = a + ib$ y semidistancia entre los polos $|k|$. La función característica de $L(z)$ es*

$$m(z) = \frac{1}{|k|^c} \{ \cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)] \}. \quad (6.10)$$

Las curvaturas de los meridianos y de los paralelos son, respectivamente:

$$\kappa_1 = |k|^{-1} \sin [c(\lambda - a)] \quad y \quad \kappa_2 = |k|^{-1} \sinh [c(q - b)]. \quad (6.11)$$

Demostración. Al derivar (6.8) obtenemos

$$L'(z) = -2kci \frac{e^{ic(z-z_0)}}{[e^{ic(z-z_0)} + 1]^2}. \quad (6.12)$$

Si tenemos en cuenta la identidad $|z+w|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ y también que

$$e^{ic(z-z_0)} = e^{-c(q-b)} e^{ic(\lambda-a)},$$

entonces se deduce que

$$|L'(z)|^{-1} = \frac{1}{2|k|^c} \frac{e^{-2c(q-b)} + 2e^{-c(q-b)} \cos [c(\lambda - a)] + 1}{e^{-c(q-b)}}.$$

Esta expresión proporciona directamente (6.10). Las curvaturas de los meridianos y de los paralelos son, por definición: $\kappa_1 = -m_\lambda$ y $\kappa_2 = m_q$, respectivamente. ■

En virtud de la Proposición 6.1, las constantes fundamentales de las transformaciones bipolares de Lagrange son:

$$a, \quad b, \quad c \quad y \quad |k|.$$

Obsérvese que, según (6.11), se tiene que $\kappa_1(a) = 0$ y $\kappa_2(b) = 0$. Es decir, las imágenes de $\lambda = a$ y de $q = b$ son sendas rectas, como ya demostramos —véase la figura 6.1—.

6.2. Función tangente. Forma canónica

Vamos a demostrar que la función tangente gobierna las transformaciones bipolares de Lagrange. Después obtenemos la forma canónica de dichas transformaciones, que consiste en expresarlas en el sistema de referencia intrínseco descrito en la sección anterior —véase la figura 6.1—.

A partir de (6.2) y (6.7) se deduce que $w_s = w_0 - k$. Entonces la función (6.8) se convierte en

$$L(z) = -k \frac{e^{ic(z-z_0)} - 1}{e^{ic(z-z_0)} + 1} + w_0.$$

Según (1.35), se tiene que

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Por tanto

$$L(z) = -ik \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] + w_0. \quad (6.13)$$

Esta expresión era ya conocida por Bonnet [1852, § 33] en el caso $\operatorname{Arg} k = 0$, $z_0 = ib$ y $w_0 = 0$; es una de sus contribuciones a la teoría de las proyecciones de Lagrange. La fórmula (6.13) no prevalece sobre (6.8), las circunstancias determinarán la más conveniente.

La *función tangente* entra de este modo a formar parte de las transformaciones conformes cartográficas, junto con la *función exponencial* —véase la Sección 1.4—, las *transformaciones racionales lineales* —Sección 1.5— y, en esta Tesis, la *función logaritmo*, asociada con la transversa de Mercator —Sección 2.4—.

Proposición 6.2. *Si $L(z)$ es una transformación bipolar de Lagrange de exponente $c > 0$ y centro z_0 , entonces su derivada pre-schwarziana es*

$$P(L) = c \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right]. \quad (6.14)$$

Demostración. Una transformación bipolar de Lagrange, según (6.13), es una transformación lineal de $\operatorname{tg} [c(z - z_0)/2]$, luego

$$P(L) = P \left(\operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] \right)$$

en virtud de (2.19). Si llamamos $f = \operatorname{tg} z$ y $g = c(z - z_0)/2$, entonces la regla de la cadena (2.18) establece que

$$P \left(\operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] \right) = [P(f) \circ g] g' + P(g) = c \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right].$$

La última igualdad se debe a que $P(g) = 0$ y $P(\operatorname{tg} z) = 2 \operatorname{tg} z$. ■

La expresión de $P(L)$ es característica de la función tangente. En efecto, esta función satisface, para todo λ complejo, que

$$P[\operatorname{tg}(\lambda z)] = \mu \operatorname{tg}(\lambda z), \quad \text{con } \mu = 2\lambda.$$

Esta fórmula está expresada en términos de autofunciones y autovalores de P . Véase la observación de la Sección 2.4 donde resolvemos la ecuación $P(f) = af$, con a complejo.

Forma canónica de las transformaciones bipolares de Lagrange

En la Sección 6.1 demostramos que cada transformación bipolar de Lagrange tiene un *sistema de referencia intrínseco* —véase la figura 6.1—. El origen de este sistema es $w_0 = L(z_0)$ y el eje Y es el eje de la transformación con orientación positiva hacia el norte. Por tanto el eje X es la imagen del paralelo principal $q = b$ con orientación positiva hacia el este. Llamamos *forma canónica* de una transformación bipolar de Lagrange a la que se obtiene cuando la transformación se expresa en su sistema de referencia intrínseco.

En la fórmula (6.13), si consideramos $\operatorname{Arg} k = \pi/2$ y $w_0 = 0$, y, sin causar confusión, utilizamos la notación $k = |k|$, entonces obtenemos

$$L(z) = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] = -ki \frac{e^{ic(z-z_0)} - 1}{e^{ic(z-z_0)} + 1}, \quad (6.15)$$

con $k > 0$. Esta es la forma canónica de las transformaciones bipolares de Lagrange, a la que designamos también como $L(z)$, pues es la forma que vamos a manejar en adelante. Equivale a un cambio de sistema de referencia: el sistema arbitrario se sustituye por el sistema de referencia intrínseco. Este cambio consiste —véase la figura 6.2— en trasladar el origen y girar según el ángulo $-\theta$, donde $\theta = \operatorname{Arg} L'(z_0)$. En efecto, a partir de (6.12) se deduce que $L'(z_0) = -cki/2$, luego

$$\theta = \operatorname{Arg} k - \pi/2.$$

Si aplicamos a $L(z)$ definida por (6.13) la traslación y el giro mencionados, entonces se obtiene

$$e^{-i\theta}(L(z) - w_0) = e^{-i\theta} \left\{ -ik \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] \right\} = |k| \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right].$$

La última expresión es la forma canónica (6.15). Ahora los polos de la transformación son los puntos $w_n = +ki$ y $w_s = -ki$, en virtud de (6.9).

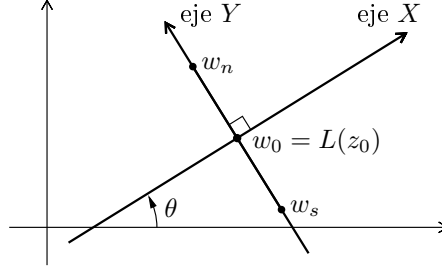


Fig. 6.2. Sistema de referencia intrínseco. Este sistema proporciona la forma canónica de las transformaciones bipolares de Lagrange.

En la forma canónica (6.15) intervienen exclusivamente las constantes fundamentales a , b , c y k . Además, su pre-schwarziana coincide con (6.14) porque la forma canónica es una transformación lineal de la forma (6.13). La forma canónica tiene dos propiedades más.

1. Cualquier transformación bipolar de Lagrange de exponente $c > 0$ se expresa en la forma (6.15). En efecto, sea

$$f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0.$$

En virtud de (6.2) y (6.4), las constantes

$$k = \frac{1}{2} \frac{|AD - BC|}{|CD|} \quad \text{y} \quad z_0 = c^{-1} (\text{Arg } \beta + i \log |\beta|^{-1}), \quad (6.16)$$

donde $\beta = D/C$, proporcionan la forma canónica de $f(z)$.

2. Dados $c > 0$ y $z_0 \in [-\pi c^{-1}, \pi c^{-1}) \times \mathbb{R}$, las funciones

$$L(z) = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right], \quad k > 0,$$

resuelven el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} S(f) = c^2/2 \\ f(z_0) = 0, \quad \text{Arg } f'(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f''(z_0) = 0, \end{cases} \quad (6.17)$$

donde $S(f)$ es la schwarziana. En efecto, según (2.34),

$$S(L) = [P(L)]' - \frac{1}{2} [P(L)]^2.$$

Como $P(L) = c \operatorname{tg} [c(z - z_0)/2]$, se obtiene $S(L) = c^2/2$. Además:

$$L(z_0) = 0, \quad L'(z_0) = kc/2 \quad \text{y} \quad L''(z) = k^{-1}cL(z)L'(z).$$

Las soluciones de $S(f) = c^2/2$ son —véase la Sección 3.4—

$$f(z) = \frac{Ae^{icz} + B}{Ce^{icz} + D}, \quad AD - BC \neq 0.$$

Al imponer el resto de condiciones del problema (6.17), las soluciones deben cumplir que $CD \neq 0$, $B = -A \exp(icz_0)$, $D/C = \exp(icz_0)$ y $\operatorname{Arg}(A/C) = -\pi/2$.

Ejemplo. Obtengamos la forma canónica de la transformación bipolar de Lagrange

$$f(z) = \frac{e^{icz} + i}{ie^{icz} + 1}$$

de exponente $c > 0$ arbitrario. En el ejemplo de la sección anterior se dedujo que el centro es $z_0 = -\pi/(2c)$; además $k = 1$ en virtud de (6.16). La fórmula (6.15) proporciona

$$L(z) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{cz}{2} \right),$$

que es la forma canónica de $f(z)$. ■

Proyección estereográfica. En la Sección 1.5 demostramos que la transformación conforme (1.31):

$$f(z) = -2Re^{q_0}i \frac{e^{iz} - e^{i(\lambda_0 + iq_0)}}{e^{iz} + e^{i(\lambda_0 - iq_0)}}$$

gobierna la proyección estereográfica centrada en (λ_0, q_0) , punto de tangencia de la esfera de radio R con el plano donde se proyecta. Observamos que $f(z)$ es una transformación bipolar de Lagrange de exponente $c = 1$ con

$$A = -2Re^{q_0}i, \quad B = -Ae^{i(\lambda_0 + iq_0)}, \quad C = 1 \quad \text{y} \quad D = e^{i(\lambda_0 - iq_0)}.$$

Según (6.16), se tiene $k = 2R \cosh q_0$ y $z_0 = \lambda_0 - iq_0$, luego

$$L(z) = 2R \cosh q_0 \operatorname{tg} [(z - z_0)/2]$$

es la *forma canónica de la estereográfica centrada en (λ_0, q_0)* , que concuerda con (1.32). Los valores de las constantes fundamentales son:

$$k = 2R \cosh q_0, \quad a = \lambda_0, \quad b = -q_0 \quad \text{y} \quad c = 1.$$

Vemos que la estereográfica está contenida en la familia de las proyecciones de Lagrange-Lambert. ■

Si $z = u + iv$, se tiene la identidad

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u + \cosh v} + i \frac{\operatorname{senh} v}{\cos u + \cosh v}. \quad (6.18)$$

A partir de ella obtenemos las ecuaciones de la proyecciones de Lagrange-Lambert asociadas con la forma canónica (6.15), $L(z) = X + iY$:

$$\begin{cases} X = k \frac{\operatorname{sen}[c(\lambda - a)]}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]} \\ Y = k \frac{\operatorname{senh}[c(q - b)]}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]} \end{cases} \quad (6.19)$$

Si derivamos (6.15) y utilizamos la identidad $2 \cos^2 w = 1 + \cos 2w$, se obtiene

$$L'(z) = \frac{kc}{1 + \cos[c(z - z_0)]},$$

luego la función característica es

$$m = \frac{1}{kc} |1 + \cos[c(z - z_0)]| = \frac{1}{kc} \{ \cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)] \}. \quad (6.20)$$

La última igualdad se debe a que $|1 + \cos(u + iv)| = \cos u + \cosh v$. La identidad $m r \sigma = 1$ proporciona la escala infinitesimal:

$$r \sigma = \frac{kc}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]}.$$

Por último, la convergencia de meridianos se deduce a partir de la fórmula (2.52): $\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma = m L'$; en este caso:

$$\cos \gamma = \frac{1 + \cos[c(\lambda - a)] \cosh[c(q - b)]}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]} \quad (6.21)$$

y

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\operatorname{sen}[c(\lambda - a)] \operatorname{senh}[c(q - b)]}{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]}. \quad (6.22)$$

Observación. El distinto factor constante que tienen las ecuaciones (6.19) y (3.22) se debe a la elección de la unidad como factor constante de la función m en la Sección 3.3, mientras que en el presente capítulo la forma canónica, que satisface las condiciones (6.17), conduce al factor constante $(kc)^{-1}$ en (6.20).

Análisis del dominio de definición

Exponemos algunas propiedades de la función tangente y las aplicamos a las transformaciones bipolares de Lagrange.

Las propiedades que siguen se pueden consultar en [Knopp, 1952, § 43]. La función tangente es periódica de periodo π : para todo z ,

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z.$$

Es habitual elegir la banda

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.23)$$

como *banda principal*. Inyectividad: la función tangente *posee el mismo valor en dos puntos distintos si y solo si uno de estos puntos puede obtenerse a partir del otro mediante una aplicación única o repetida de la traslación* (π).

Biyectividad: en la banda principal (6.23), la función tangente *toma cada valor complejo, distinto de $\pm i$, precisamente una vez; por otra parte, no toma ninguno de los valores $\pm i$* . Esto implica que la derivada no se anula en ningún punto, pues $d(\operatorname{tg} z)/dz = 1 + \operatorname{tg}^2 z$. Se concluye que

$$\operatorname{tg} z : \{-\pi/2 < \operatorname{Re} z \leq \pi/2\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$$

es una transformación biyectiva y conforme.

En general —figura 6.3—, $\operatorname{tg} z$ transforma biunívoca y conformemente la banda $u_0 \leq \operatorname{Re} z \leq u_0 + h$ de anchura $h \leq \pi$ en una lúnula de ángulos iguales a $2h$, con los vértices en los puntos $-i$ y $+i$. Esta propiedad y la figura 6.3 se pueden encontrar en [Markushevich, 1970, Capítulo 2, § 4.10].

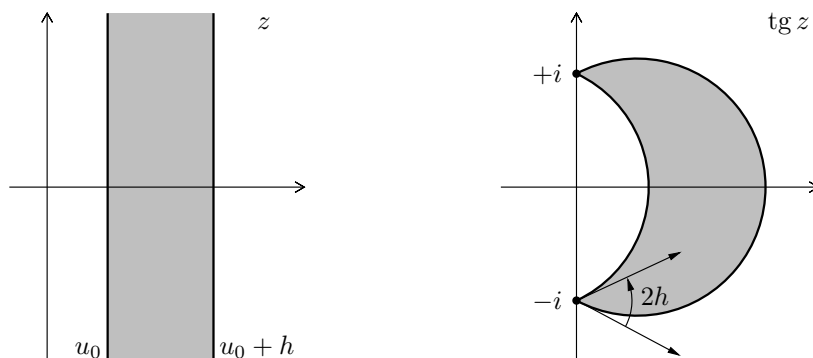


Fig. 6.3. Transformación de la banda $u_0 \leq \operatorname{Re} z \leq u_0 + h$ mediante la función tangente.

Al aplicar las anteriores propiedades a las transformaciones bipolares de Lagrange, extraemos las siguientes conclusiones que recogemos en tres apartados.

1. La función asociada con la forma canónica, $L(z) = k \operatorname{tg} [c(z - z_0)/2]$, es periódica de periodo $2\pi c^{-1}$, pues

$$\operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] = \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) + \pi \right] = \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z + 2\pi c^{-1} - z_0) \right].$$

Establecemos la banda $a - \pi c^{-1} < \operatorname{Re} z \leq a + \pi c^{-1}$ como banda principal de $L(z)$. Se tiene que

$$L(z) : \{a - \pi c^{-1} < \operatorname{Re} z \leq a + \pi c^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-ki, +ki\}$$

es una transformación biyectiva y conforme.

2. Llamamos *intervalo máximo de biyectividad* (se sobrentiende que en longitud terrestre) a

$$I_{a,c} = [a - \pi c^{-1}, a + \pi c^{-1}].$$

Este intervalo tiene sentido incluso si $|a| > \pi$, es decir, si no existe meridiano principal.

3. Una proyección de Lagrange-Lambert es biyectiva en el intervalo (en longitud terrestre)

$$I = [-\pi, \pi) \cap I_{a,c}.$$

Distinguimos cuatro casos —figura 6.4—, aquellos donde I es no vacío.
1.º $I = [-\pi, \pi)$. El único caso donde la superficie terrestre se representa completamente. Esto se cumple si y solo si $[-\pi, \pi) \subseteq I_{a,c}$, es decir, si y solo si

$$c \leq 1 \quad \text{y} \quad |a| \leq \pi(c^{-1} - 1).$$

2.º $I = \{\lambda : -\pi \leq \lambda \leq a + \pi c^{-1}\}$. En este caso se deben cumplir las condiciones: $a - \pi c^{-1} < -\pi$ y $-\pi < a + \pi c^{-1} < \pi$, que equivalen a

$$\frac{1}{1 - a/\pi} < c < \frac{1}{|1 + a/\pi|}$$

o bien

$$-\pi(1 + c^{-1}) < a < \min \{ \pi(1 - c^{-1}), \pi(c^{-1} - 1) \} \leq 0.$$

3.º $I = \{\lambda : a - \pi c^{-1} \leq \lambda < \pi\}$. Aquí se deben cumplir las condiciones: $-\pi < a - \pi c^{-1} < \pi$ y $\pi < a + \pi c^{-1}$, es decir,

$$\frac{1}{1 + a/\pi} < c < \frac{1}{|1 - a/\pi|}$$

o bien

$$0 \leq \max\{\pi(1 - c^{-1}), \pi(c^{-1} - 1)\} < a < \pi(1 + c^{-1}).$$

4.º $I = I_{a,c}$. Este último caso equivale a $I_{a,c} \subseteq [-\pi, \pi)$, que se cumple si y solo si

$$c > 1 \quad \text{y} \quad |a| < \pi(1 - c^{-1}).$$

Aquí existe siempre meridiano principal, $\lambda = a$, porque $0 < 1 - c^{-1} < 1$ si $c > 1$.

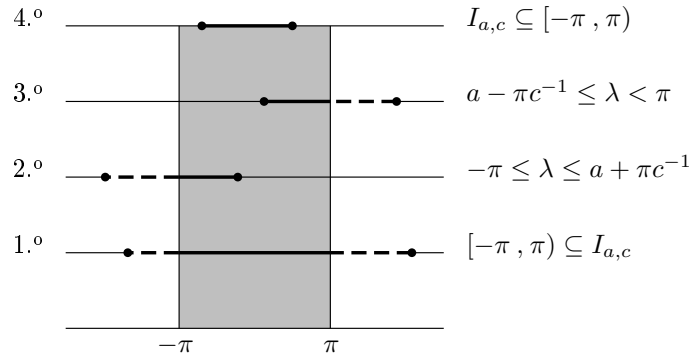


Fig. 6.4. Representación del intervalo $I = [-\pi, \pi) \cap I_{a,c}$ donde una proyección de Lagrange-Lambert es biyectiva.

6.3. Meridianos y paralelos

Analizamos la red de meridianos y paralelos de las proyecciones de Lagrange-Lambert, asociadas con la forma canónica

$$L(z) = X + iY = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right], \quad k > 0, \quad c > 0, \quad z_0 = a + ib.$$

Según demostramos en la sección anterior, el eje X es la imagen del paralelo principal, $q = b$, con orientación positiva hacia el este, y el eje Y es el eje de la transformación con orientación positiva hacia el norte. Los puntos $w_n = ki$ y $w_s = -ki$ del plano $w = L(z)$ son, respectivamente, las imágenes de los polos norte y sur, y el segmento que los une es la imagen de $\lambda = a$.

Coordenadas distancia

Debido a su utilidad en el Capítulo 7 y en el presente, introducimos las *coordenadas distancia* (μ, ν) en el plano $w = L(z)$:

$$\mu = |ki - L(z)|, \quad \nu = |ki + L(z)|. \quad (6.24)$$

También llamadas *coordenadas bipolares* —consúltese por ejemplo [Lamb, 1942, Capítulo IX, § 132]—, representan las distancias a dos puntos fijos o focos, en este caso las imágenes de los polos terrestres, según ilustra la figura 6.5. Exponemos algunas observaciones y propiedades.

1. Las expresiones (6.24) equivalen a

$$\mu = \sqrt{X^2 + (Y - k)^2}, \quad \nu = \sqrt{X^2 + (Y + k)^2}.$$

A todo punto (X, Y) corresponde un único par ordenado (μ, ν) , pero a todo par de coordenadas distancia corresponden dos puntos: (X, Y) y $(-X, Y)$.

2. Se tiene que $\mu + \nu \geq 2k$. La igualdad se cumple si y solo si $\lambda = a$, pues su imagen es el segmento limitado por w_s y w_n .
3. La fórmula (6.6) dice que

$$\frac{ki - L(z)}{ki + L(z)} = e^{ic(z-z_0)} = e^{-c(q-b)} e^{ic(\lambda-a)},$$

luego

$$\text{Arg} \frac{ki - L(z)}{ki + L(z)} = c(\lambda - a). \quad (6.25)$$

y

$$\boxed{\frac{\mu}{\nu} = e^{-c(q-b)}}. \quad (6.26)$$

A partir de (6.25) se deduce que el ángulo, en el punto $w = L(z)$, que comprende el segmento formado por w_s y w_n , es

$$\pi - c(\lambda - a),$$

ángulo marcado en la figura 6.5. Además, el Teorema del coseno, aplicado al triángulo cuyos vértices son $w = L(z)$, w_s y w_n , relaciona λ con las coordenadas distancia:

$$\boxed{4k^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos [c(\lambda - a)]}. \quad (6.27)$$

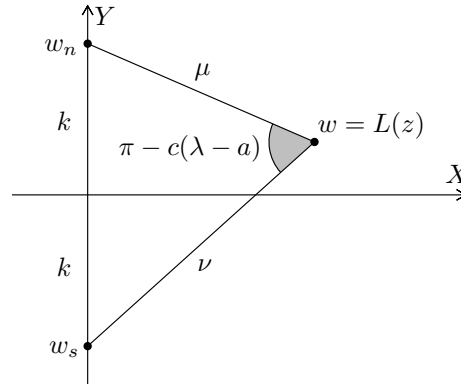


Fig. 6.5. Coordenadas distancia o coordenadas bipolares (μ, ν) .

En su segunda memoria Lagrange [1779, § 31] introduce las coordenadas distancia y expresa la escala infinitesimal en función de ellas, según veremos en el Capítulo 7. Darboux [1887, § 135] las utiliza implícitamente para obtener las ecuaciones de las proyecciones de Lagrange-Lambert. Pero es Bonnet [1852, § 34] quien aprovecha estas coordenadas para expresar la función característica de estas proyecciones, según sus palabras: «d'une forme assez remarquable».

Proposición 6.3 (Bonnet). Sea $L(z) = k \operatorname{tg} [c(z - z_0)/2]$ una transformación bipolar de Lagrange. La función característica de $L(z)$, en coordenadas distancia, es

$$m(\mu, \nu) = \frac{2k}{c} \frac{1}{\mu\nu}. \quad (6.28)$$

Demostración. Según (6.20), la función característica de las proyecciones de Lagrange-Lambert es

$$m = \frac{1}{kc} \left\{ \cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)] \right\}.$$

Esta fórmula se convierte, en virtud de (6.26) y (6.27), en

$$m = \frac{1}{kc} \left[\frac{4k^2 - \mu^2 - \nu^2}{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\mu} + \frac{\mu}{\nu} \right) \right],$$

que proporciona, después de simplificar, la expresión deseada. ■

Meridianos

En la sección anterior demostramos que una proyección de Lagrange-Lambert es biyectiva en el intervalo (en longitud terrestre)

$$[-\pi, \pi) \cap [a - \pi c^{-1}, a + \pi c^{-1}].$$

Los únicos meridianos rectilíneos son tres (los valores de a y c condicionan la existencia de ellos) y están contenidos en el eje de la transformación. La imagen de $\lambda = a$ es el segmento que une los puntos w_s y w_n ; la imagen de $\lambda = a + \pi c^{-1}$ es la orilla derecha de las dos semirrectas definidas por los intervalos $(-\infty, -k)$ y $(+k, +\infty)$ del eje Y ; la imagen de $\lambda = a - \pi c^{-1}$ es la orilla izquierda de las semirrectas anteriores —véase la figura 6.8—.

Según las propiedades de la función tangente —véase la figura 6.3—, el conjunto de meridianos restantes se transforma en el haz de circunferencias que pasan por w_s y w_n (*pencil of circles through w_s y w_n* [Knopp, 1952, § 20]) ilustrado en la figura 6.6. En concreto, cada meridiano se transforma en un arco circular a derecha o izquierda del eje Y , según λ sea mayor o menor que a , respectivamente.

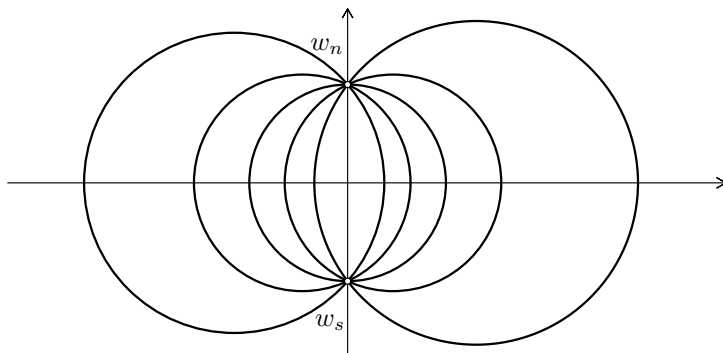


Fig. 6.6. Haz de circunferencias que pasan por w_s y w_n en el plano $w = L(z)$. Representa el conjunto de meridianos de las proyecciones de Lagrange-Lambert.

El siguiente resultado es importante porque está en el origen de estas proyecciones. Lambert [1772, Capítulo V, §§ 58-64] modifica en la proyección estereográfica ecuatorial la convergencia de meridianos en los polos: sustituye el valor original λ por $c\lambda$. De este modo construye las presentes proyecciones, según hemos estudiado en la Sección 3.1. Por otra parte, es una propiedad característica de la función tangente como ilustra la figura 6.3.

Proposición 6.4. Sea $L(z) = k \operatorname{tg} [c(z - z_0)/2]$ una transformación bipolar de Lagrange. El arco circular imagen de un meridiano de longitud $\lambda \neq a$ corta al eje de la transformación con un ángulo igual a $c(\lambda - a)$.

Demostración. Consideremos el arco circular que es la imagen de un meridiano de longitud $\lambda \neq a$, representado en la figura 6.7. El eje Y , eje de la transformación, y la recta tangente al arco circular forman en el punto w_n un ángulo θ . Este ángulo es el que buscamos y coincide con la convergencia de meridianos en el polo norte. Luego

$$\theta = \lim_{q \rightarrow +\infty} \gamma(\lambda, q).$$

Si utilizamos las fórmulas (6.21) y (6.22), obtenemos:

$$\cos \theta = \lim_{q \rightarrow \infty} \cos \gamma = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\cos [c(\lambda - a)] + \operatorname{sech} [c(q - b)]}{1 + \cos [c(\lambda - a)] \operatorname{sech} [c(q - b)]} = \cos [c(\lambda - a)]$$

y

$$\sin \theta = \lim_{q \rightarrow \infty} \sin \gamma = \sin [c(\lambda - a)] \lim_{q \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} [c(q - b)] = \sin [c(\lambda - a)].$$

Esto prueba que $\theta = c(\lambda - a)$. La simetría del arco circular en cuestión respecto al eje X implica que el eje de la transformación y el arco forman, en w_s , un ángulo de igual magnitud y sentido opuesto. ■

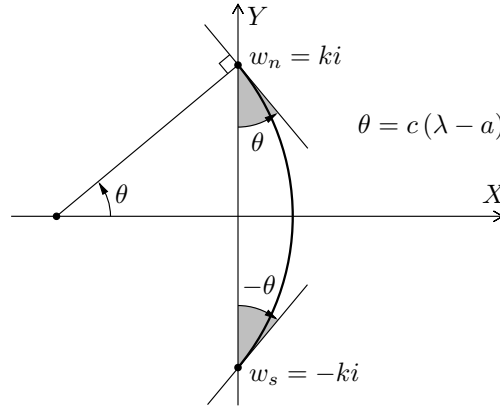


Fig. 6.7. Todo meridiano de longitud λ corta al eje de la transformación con un ángulo de magnitud $c(\lambda - a)$.

Corolario 6.1. Una proyección de Lagrange-Lambert es conforme en todos los puntos del elipsoide terrestre si y solo si $c = 1$. Si $c \neq 1$ se excluyen los polos.

Demostración. Según probamos en la sección anterior,

$$L(z) : \{a - \pi c^{-1} < \operatorname{Re} z \leq a + \pi c^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-w_s, +w_n\}$$

es una transformación biyectiva y conforme. En virtud de la Proposición 6.4, la convergencia de meridianos en los puntos w_s y w_n es $-c(\lambda - a)$ y $c(\lambda - a)$, respectivamente. Estos ángulos coinciden con los correspondientes ángulos del elipsoide terrestre si y solo si $c = 1$. ■

Otra consecuencia de la Proposición 6.4 es que facilita la obtención de la ecuación de los meridianos en coordenadas (X, Y) . En efecto, en la figura 6.7 se observa que el radio del arco circular coincide con el segmento limitado por w_n y el centro del arco, y $c(\lambda - a)$ es el ángulo que forman el eje X y dicho segmento. Por tanto la ecuación de los meridianos es

$$(X + k \cotg [c(\lambda - a)])^2 + Y^2 = (k \operatorname{cosec} [c(\lambda - a)])^2.$$

El radio se conocía pues la curvatura de un meridiano es, en virtud de (6.20),

$$\kappa_1 = -m_\lambda = k^{-1} \operatorname{sen} [c(\lambda - a)].$$

La figura 6.8 resume el análisis que hemos realizado de los meridianos.

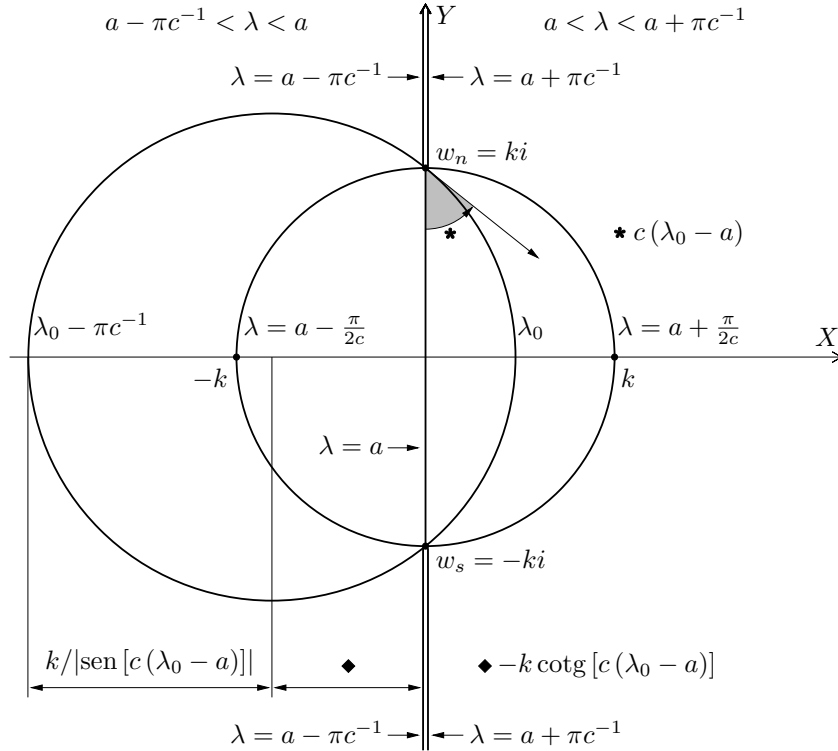


Fig. 6.8. Meridianos de las proyecciones de Lagrange-Lambert.

Paralelos

El único paralelo rectilíneo es $q = b$. Su imagen está contenida en la mediatriz del segmento limitado por w_s y w_n , que coincide con el eje X en la forma canónica. El conjunto de paralelos restantes se transforma en el haz de circunferencias de Apolonio (*pencil of circles about w_s y w_n* [Knopp, 1952, § 20]) ilustrado en la figura 6.9.

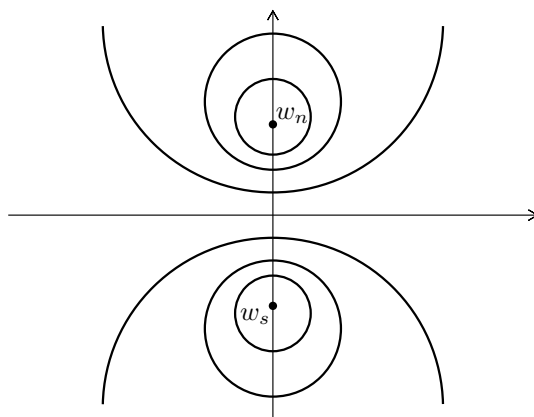


Fig. 6.9. Haz de circunferencias de Apolonio (respecto a w_s y w_n) en el plano $w = L(z)$. Representa el conjunto de paralelos de las proyecciones de Lagrange-Lambert.

Observación. Lo que sigue puede consultarse, por ejemplo, en [Ogilvy, 1990, Capítulo 2]. El matemático griego Apolonio de Perge descubrió que una circunferencia puede definirse de una forma diferente de la habitual (todos los puntos equidistantes respecto a un punto fijo). Una *circunferencia de Apolonio* es el lugar geométrico de los puntos P tales que la razón de distancias respecto a dos puntos fijos A y B es constante: $AP/BP = k$, con $k > 0$. Es una circunferencia —figura 6.10— centrada en la recta AB , excepto si $k = 1$ en cuyo caso es la mediatriz del segmento AB . Los puntos de intersección, C y D , de la circunferencia y la recta AB verifican: $CA/CB = DA/DB = k$, y se dice que C y D dividen *armónicamente* el segmento AB .

Proposición 6.5. Sea $L(z) = k \operatorname{tg} [c(z - z_0)/2]$ una transformación bipolar de Lagrange. Todo paralelo de latitud $q \neq b$ se transforma en una circunferencia de Apolonio respecto a los puntos $w_s = -ki$ y $w_n = +ki$.

En virtud de (6.26) se tiene que

$$\frac{|L(z) - w_n|}{|L(z) - w_s|} = e^{-c(q-b)}. \quad (6.29)$$

Por tanto cualquier paralelo de latitud $q \neq b$ se transforma en el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de distancias respecto a los puntos w_s y w_n es constante. Queda así demostrada la Proposición 6.5.

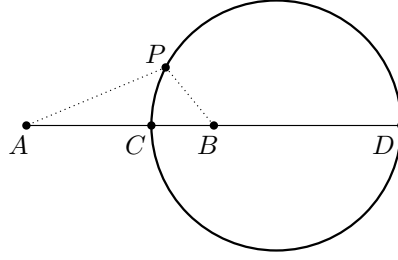


Fig. 6.10. Circunferencia de Apolonio. La razón AP/BP es constante en todos los puntos de la circunferencia.

Para determinar la ecuación de los paralelos en coordenadas (X, Y) empleamos el siguiente resultado —véase [Levinson y Redheffer, 1990, Capítulo 5, Teorema 2.1]—.

Teorema 6.2. Sean w_1 y w_2 dos números complejos distintos y supongamos que $d > 0$. Entonces la ecuación

$$\left| \frac{w - w_1}{w - w_2} \right| = d \quad (6.30)$$

representa una circunferencia cuando $d \neq 1$, cuyo centro y radio son

$$w_0 = \frac{w_1 - d^2 w_2}{1 - d^2}, \quad R = d \frac{|w_1 - w_2|}{|1 - d^2|}.$$

Los puntos w_1 y w_2 son puntos inversos respecto a esta circunferencia. Si $d < 1$, el punto w_1 es interior a la circunferencia, y si $d > 1$, w_1 es exterior a ella. Cuando $d = 1$, la ecuación (6.30) representa una recta y los puntos w_1 y w_2 son inversos (es decir, simétricos) respecto a ella.

Si relacionamos (6.29) con (6.30) y hacemos: $w_1 = w_n$, $w_2 = w_s$ y $d = \exp[-c(q - b)]$, entonces el Teorema 6.2 proporciona el centro y el radio de cada paralelo de latitud $q \neq b$; esta es su ecuación:

$$X^2 + (Y - k \cotgh[c(q - b)])^2 = (k \operatorname{cosech}[c(q - b)])^2. \quad (6.31)$$

El radio se conocía pues la curvatura de un paralelo es, en virtud de (6.20),

$$\kappa_2 = m_q = k^{-1} \sinh[c(q - b)].$$

Cada paralelo se transforma en una circunferencia de Apolonio situada encima o debajo del eje X , según q sea mayor o menor que b , respectivamente. La figura 6.11 resume el análisis que hemos realizado de los paralelos.

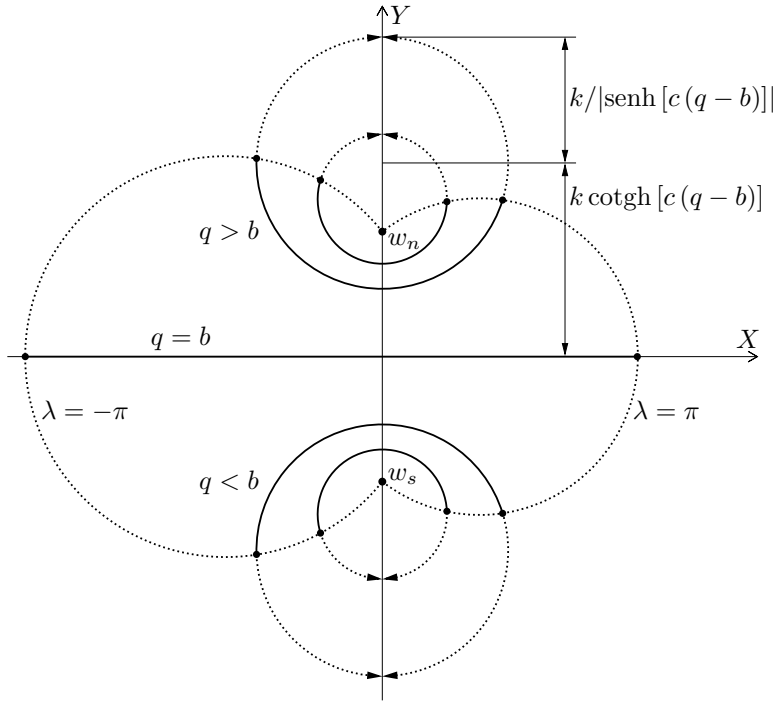


Fig. 6.11. Paralelos de las proyecciones de Lagrange-Lambert.

Latitud modificada. Para terminar vamos a expresar las ecuaciones de las proyecciones de Lagrange-Lambert (6.19) de modo que no aparezcan funciones hiperbólicas. La circunferencia de Apolonio asociada con un paralelo de latitud $q \neq b$ corta, en dos puntos distintos, a la circunferencia que pasa por w_s y w_n con centro en el origen de coordenadas —figura 6.12—. Sea P el punto de intersección con coordenada positiva. El sistema formado por las ecuaciones $X^2 + Y^2 = k^2$ y (6.31) proporciona las coordenadas de P :

$$X = k \operatorname{sech} [c(q-b)], \quad Y = k \operatorname{tgh} [c(q-b)]. \quad (6.32)$$

Sea $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ el ángulo, orientado positivamente, que forman el eje X y la recta que pasa por el origen y P . Cada paralelo determina un punto P que a su vez determina un ángulo θ . En efecto, a partir de (6.32) obtenemos:

$$\cos \theta = \operatorname{sech} [c(q-b)] \quad \text{y} \quad \sin \theta = \operatorname{tgh} [c(q-b)].$$

Y viceversa, cada ángulo θ determina un paralelo, pues

$$\cosh [c(q-b)] = \sec \theta \quad \text{y} \quad \sinh [c(q-b)] = \operatorname{tg} \theta. \quad (6.33)$$

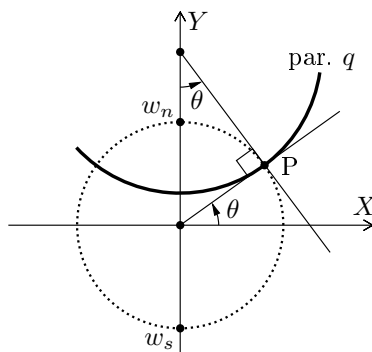


Fig. 6.12. Cada paralelo determina un ángulo θ y viceversa.

Además, como $\exp x = \cosh x + \sinh x$, se tiene que

$$e^{c(q-b)} = \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

Al introducir (6.33) en (6.19), y llamar $l = c(\lambda - a)$, las ecuaciones de las proyecciones de Lagrange-Lambert se expresan así:

$$\begin{cases} X = k \frac{\cos \theta \operatorname{sen} l}{1 + \cos \theta \cos l} \\ Y = k \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta \cos l}. \end{cases}$$

Estas ecuaciones fueron obtenidas por Tissot [1881, Complément, § 111, p. 270], con $k = 1$, en su estudio sobre las proyecciones que transforman los meridianos y paralelos en circunferencias que se cortan en ángulo recto. Tissot introduce las coordenadas (l, θ) a las que denomina respectivamente *longitude modifiée d'un méridien* [p. 269] y *latitude modifiée d'un parallèle* [p. 267]. Las ecuaciones se encuentran también en [Lehmann, 1939, p. 332, fórmulas (6d)], y en [König y Weise, 1951, p. 114, ecuación (39), y p. 380] donde a (l, θ) se denomina *pseudogeographischen Koordinaten*.

6.4. Mapas

Debido a su utilidad para crear mapas, resolvemos el problema de encontrar la proyección de Lagrange-Lambert que transforme un huso terrestre en la región comprendida por dos arcos circulares arbitrarios. Para cerrar la sección exponemos seis mapas.

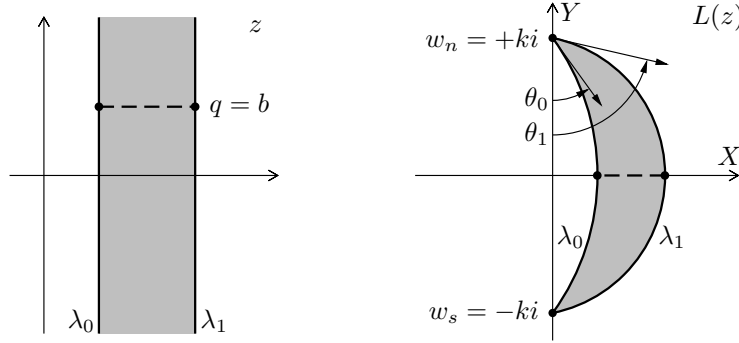


Fig. 6.13. Imagen de la banda $\lambda_0 \leq \operatorname{Re} z \leq \lambda_1$ en las proyecciones de Lagrange-Lambert.

Consideremos, en el plano z , la banda $\lambda_0 \leq \operatorname{Re} z \leq \lambda_1$, donde λ_0 y λ_1 son las longitudes de dos meridianos fijados previamente. Sea

$$L(z) = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right], \quad k > 0, \quad c > 0, \quad z_0 = a + ib,$$

una transformación bipolar de Lagrange. Sabemos que $L(z)$ transforma dicha banda en una lúnula, como muestra la figura 6.13. El eje Y y los arcos circulares imágenes de los meridianos λ_0 y λ_1 forman, en el punto w_n , los ángulos

$$c(\lambda_0 - a) = \theta_0 \quad \text{y} \quad c(\lambda_1 - a) = \theta_1, \quad (6.34)$$

respectivamente. La forma de la lúnula está determinada por los ángulos θ_0 y θ_1 , es decir, por a y c . El resto de constantes fundamentales, k y b , no alteran la forma de la lúnula: k modifica su tamaño y b determina la latitud isométrica del paralelo que se transforma en el eje X .

El análisis anterior sugiere el siguiente problema: dados θ_0 y θ_1 en $[-\pi, \pi]$, con $\theta_0 < \theta_1$, y dos meridianos $\lambda_0 < \lambda_1$, encontrar las constantes a y c asociadas con la proyección de Lagrange-Lambert que transforma el huso terrestre limitado por λ_0 y λ_1 en la lúnula determinada por θ_0 y θ_1 . Si planteamos (6.34) como un sistema de ecuaciones con incógnitas a y c , obtenemos la solución del problema:

$$a = \frac{\theta_1 \lambda_0 - \theta_0 \lambda_1}{\theta_1 - \theta_0} \quad \text{y} \quad c = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\lambda_1 - \lambda_0}. \quad (6.35)$$

Los tres ejemplos que siguen ofrecen casos particulares de este problema. En todos ellos consideramos $\lambda_0 = -\pi$ y $\lambda_1 = \pi$, es decir, proyectamos la superficie terrestre íntegramente.

1. El mundo en una lúnula. Sean $\theta_0 = \pi/4$ y $\theta_1 = \pi/2$. En virtud de (6.35), cualquier proyección de Lagrange-Lambert con $a = -3\pi$ y expo-

nente $c = 1/8$ representa la superficie terrestre en la lúnula que muestra la figura 6.14.

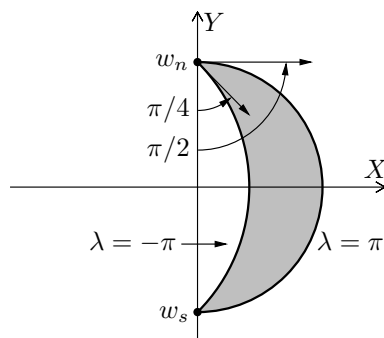


Fig. 6.14. El mundo en una lúnula.

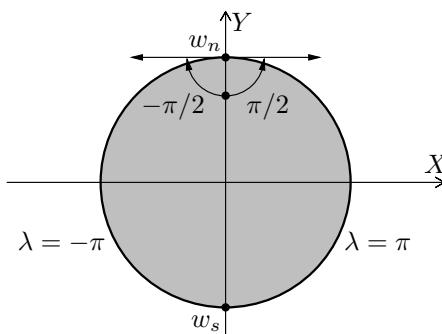


Fig. 6.15. Mapamundi circular.

2. El mundo en un círculo. Para representar la superficie terrestre en el círculo que pasa por w_s y w_n con centro en el origen —figura 6.15— consideramos $\theta_0 = -\pi/2$ y $\theta_1 = \pi/2$. Las fórmulas (6.35) proporcionan: $a = 0$ y $c = 1/2$. Es el caso más conocido de las proyecciones de Lagrange-Lambert. Se corresponde con el mapa que Lambert [1772, Capítulo V, § 63] construyó y que hemos reproducido en la figura 3.3.

3. El mundo en el plano. En este caso hacemos $\theta_0 = -\pi$ y $\theta_1 = \pi$ —figura 6.16—. Según (6.35) obtenemos $a = 0$ y $c = 1$. Por tanto este caso se corresponde con la proyección estereográfica general —véase la Sección 6.2—.

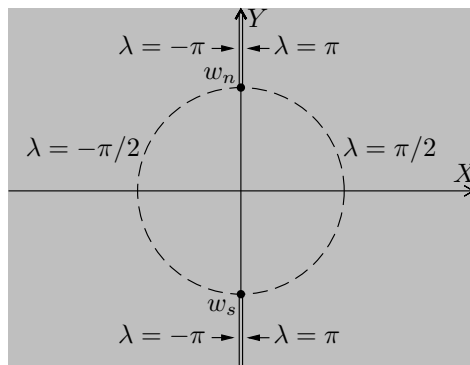


Fig. 6.16. El mundo en el plano.

Los seis mapas que exponemos a continuación —figuras 6.17 a 6.22— cierran de momento (volveremos en el Capítulo 7) nuestro estudio de las proyecciones de Lagrange-Lambert. En su construcción hemos considerado la transformación conforme $L(z) = \operatorname{tg}[c(z - z_0)/2]$, $z_0 = a + ib$, pues la constante k solo altera el tamaño del mapa. La red de meridianos y paralelos tiene 15° excepto el último mapa donde los meridianos están separados 30° .

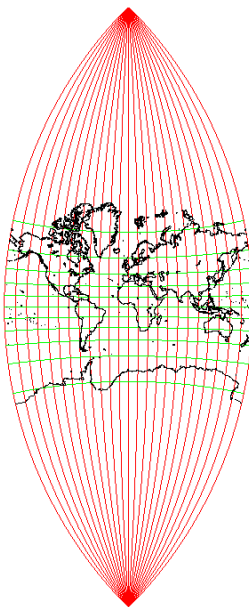


Fig. 6.17. Mapa de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1/4$, con $a = b = 0$; $L(z) = \operatorname{tg}(z/8)$.

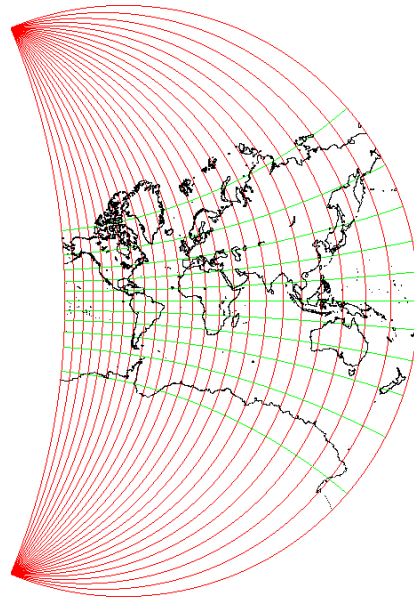


Fig. 6.18. Mapa de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1/4$, con $a = -3\pi/2$ y $b = 0$; $L(z) = \text{tg}[(z + 3\pi/2)/8]$. No existe meridiano principal, pues $|a| > \pi$.

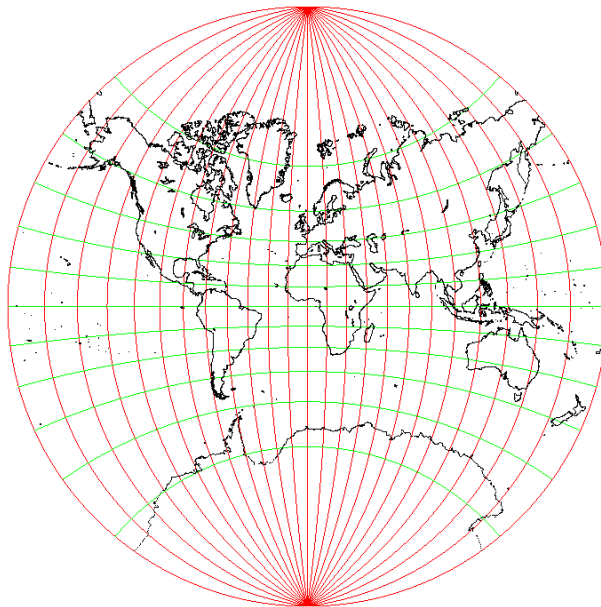


Fig. 6.19. Mapa de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1/2$, con $a = b = 0$; $L(z) = \text{tg}(z/4)$. Semejante al que Lambert construyó y que hemos reproducido en la figura 3.3.

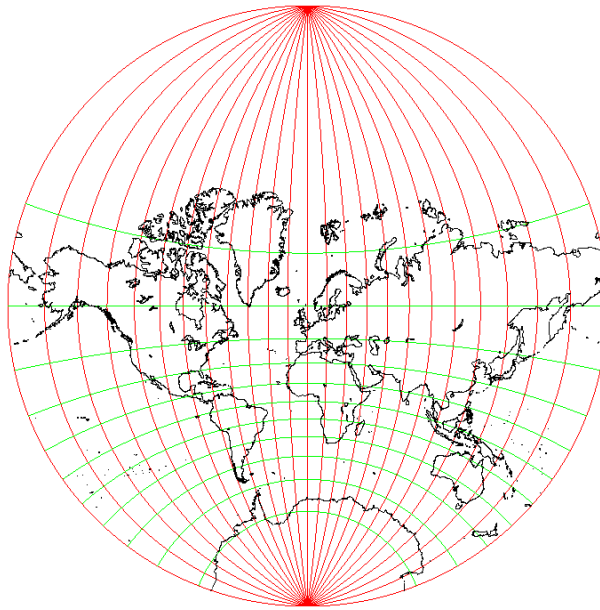


Fig. 6.20. Mapa de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1/2$, con $a = 0$ y $b = 1.317$; $L(z) = \text{tg}[(z - 1.317i)/4]$. El paralelo principal, de latitud $q = b$, se corresponde con 60° norte.

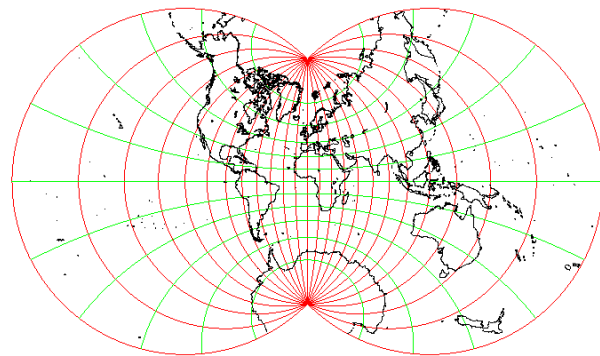


Fig. 6.21. Mapa de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 3/4$, con $a = b = 0$; $L(z) = \text{tg}(3z/8)$.

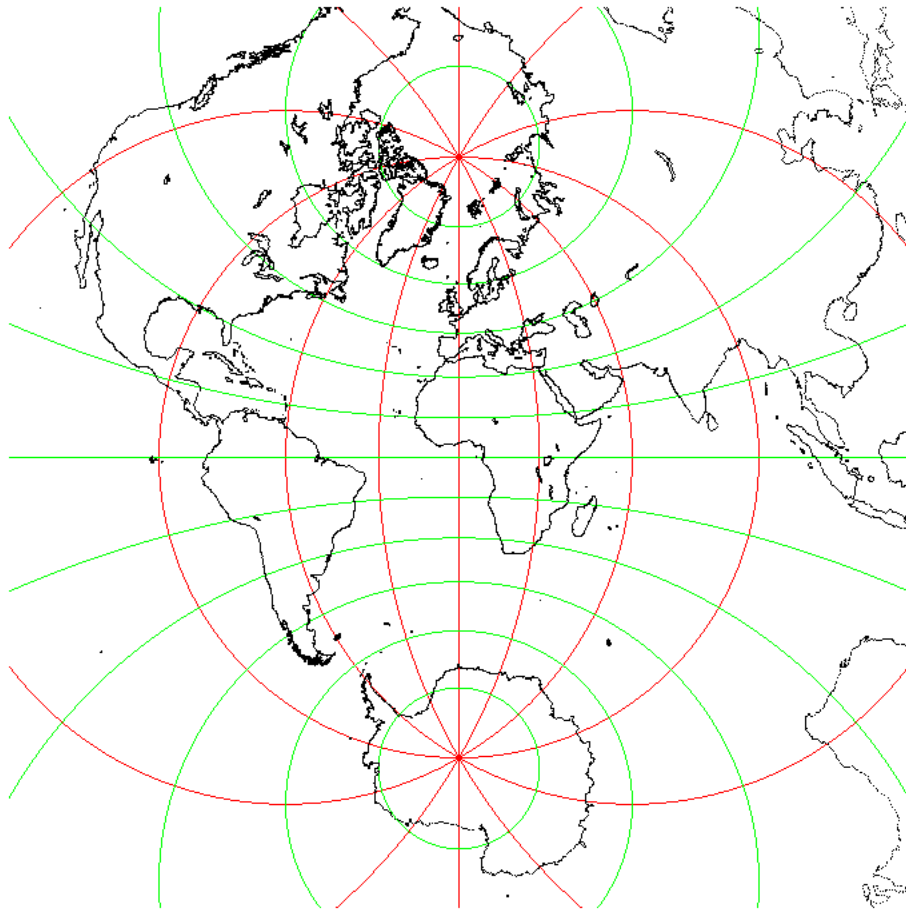


Fig. 6.22. Mapa de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1$, con $a = b = 0$; $L(z) = \operatorname{tg}(z/2)$. También representa el mapa de la proyección estereográfica ecuatorial.

6.5. Proyecciones apolares

Al resolver el Problema de Lagrange (determinar las proyecciones conformes que transforman los meridianos y los paralelos en circunferencias) hemos obtenido tres familias de proyecciones de Lagrange circulares —véase la Sección 3.5—: las unipolares, las de Lagrange-Lambert y las apolares. En la primera la schwarziana es idénticamente nula. En las otras dos la schwarziana es constante y se diferencian en el signo de esa constante.

En su primera memoria, Lagrange [1779, § 10] obtiene la transformación conforme $f(z)$ asociada con las proyecciones de Lagrange-Lambert y las apolares, al resolver la ecuación

$$\frac{g''}{g} = k, \quad \text{con } g = \frac{1}{\sqrt{f'}}.$$

Omite el caso $k = 0$ (que proporciona las unipolares) y hace la siguiente observación [§ 11]:

De aquí concluyo por tanto que basta considerar el caso en que k es una cantidad positiva, y que después no habrá más que intercambiar t por u para tener el de k negativo.

Las variables t y u se corresponden con λ y $-q$ respectivamente. En la segunda memoria Lagrange vuelve a esta cuestión [§ 21]:

En primer lugar observo que las fórmulas halladas en la primera Memoria (12 y 16) contienen dos soluciones diferentes, ya que se ha visto (11) que está permitido cambiar t por u y u por t ; pero observo al mismo tiempo que la solución que resultaría de esta permutación sería más curiosa que cómoda en la práctica, ya que contendría exponenciales del ángulo t y senos y cosenos de la cantidad u que, hemos demostrado, es una cantidad logarítmica.

Bonnet [1852, § 25], que también resuelve el Problema de Lagrange, hace una observación similar. Lagrange y Bonnet no estudian la solución asociada con las proyecciones apolares. Tissot [1881, Complément, §§ 119-121] presta más atención a estas proyecciones y dibuja la red de meridianos y paralelos de una en concreto [§ 121, p. 282, figura 17].

Llamamos *proyección apolar de exponente $c > 0$* a la proyección conforme asociada con la función

$$f(z) = \frac{Ae^{cz} + B}{Ce^{cz} + D}, \quad CD \neq 0, \quad AD - BC \neq 0. \quad (6.36)$$

Vamos a demostrar que la función tangente hiperbólica gobierna las proyecciones apolares. Las funciones hiperbólicas se definen por medio de las fórmulas —véase por ejemplo [Knopp, 1952, § 44]—:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

Se deduce, a partir de (1.34), que $\cosh z = \cos(iz)$ y $\sinh z = -i \sin(iz)$. Esto y (1.35) permiten concluir que

$$\operatorname{tgh} z = -i \operatorname{tg}(iz) = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}. \quad (6.37)$$

Proposición 6.6. *Sea $f(z)$ la transformación conforme asociada con una proyección apolar de exponente $c > 0$. Entonces existe una transformación bipolar de Lagrange de exponente c , $L(z)$, tal que $f(z) = L(iz)$.*

Demostración. Sea $f(z)$ la transformación conforme (6.36). Se tiene que

$$f(z) = \frac{Be^{-cz} + A}{De^{-cz} + C}.$$

Entonces la transformación bipolar de Lagrange de exponente $c > 0$:

$$L(z) = \frac{Be^{icz} + A}{De^{icz} + C}, \quad DC \neq 0, \quad BC - AD \neq 0,$$

satisface que $f(z) = L(iz)$. ■

Corolario 6.2. *La función tangente hiperbólica gobierna las proyecciones apolares.*

La función tangente gobierna $L(z)$, como muestra la fórmula (6.13). La Proposición 6.6 y la identidad $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{tgh} z$, que se deduce de (6.37), completan la demostración del Corolario 6.2.

Forma canónica

La Proposición 6.6 establece que $f(\lambda, q) = L(-q, \lambda)$. Esta relación, basada en permutar λ y q , es la que observan Lagrange y Bonnet, como hemos señalado al principio. En ella y en el Corolario 6.2 nos fundamentamos para definir la *forma canónica* de las proyecciones apolares de exponente $c > 0$:

$$F(z) = k \operatorname{tgh} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right] = k \frac{e^{c(z-z_0)} - 1}{e^{c(z-z_0)} + 1}, \quad (6.38)$$

donde $k > 0$ y $z_0 = a + ib$. Confróntese con (6.15). La forma canónica (6.38) equivale a expresar la función (6.36) en su *sistema de referencia intrínseco*, cuyo origen es la imagen de un punto arbitrario z_0 , el eje X es la imagen de $q = b$ y el eje Y es la imagen de $\lambda = a$. En efecto, $F(z_0) = k \operatorname{tgh} 0 = 0$,

$$F(\lambda + ib) = k \operatorname{tgh} [c(\lambda - a)/2]$$

para todo $\lambda \in [-\pi, \pi]$, y, en virtud de (6.37),

$$F(a + iq) = ik \operatorname{tg} [c(q - b)/2]$$

para todo $q \in (b - \pi c^{-1}, b + \pi c^{-1})$. Véase la figura 6.23.

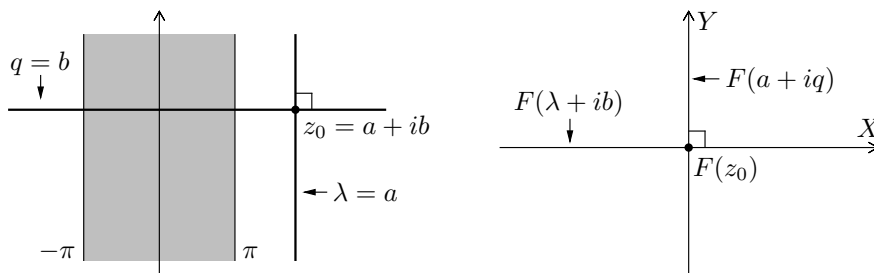


Fig. 6.23. Forma canónica de las proyecciones apolares, $F(z) = X + iY = k \operatorname{tgh} [c(z - z_0)/2]$.

La función inversa de $w = F(z)$ se obtiene al despejar en (6.38):

$$e^{c(z-z_0)} = \frac{k+w}{k-w}, \quad (6.39)$$

que tiene sentido para todo w distinto de $+k$ y $-k$, porque la función

$$e^{c(z-z_0)} : \mathbb{R} \times [b - \pi c^{-1}, b + \pi c^{-1}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

es biyectiva —consúltese la Sección 1.4—. Por tanto

$$z = F^{-1}(w) = z_0 + \frac{1}{c} \operatorname{Log} \frac{k+w}{k-w}.$$

Respecto al dominio de definición de $F(z)$, observamos que *la función tangente hiperbólica es periódica de periodo πi* . En efecto, si tenemos en cuenta (6.37) y que la función tangente es periódica de periodo π —Sección 6.2—, entonces se cumple, para todo z :

$$\operatorname{tgh}(z + \pi i) = -i \operatorname{tg}[i(z + \pi i)] = -i \operatorname{tg}(iz) = \operatorname{tgh} z.$$

Como es habitual, elegimos la banda principal: $-\pi/2 < \operatorname{Im} z \leq \pi/2$. De esta propiedad se deduce que la forma canónica de las proyecciones apolares, $F(z) = k \operatorname{tgh} [c(z - z_0)/2]$, es periódica de periodo $2\pi c^{-1}i$, y que la banda principal, donde es inyectiva, es

$$b - \pi c^{-1} < \operatorname{Im} z \leq b + \pi c^{-1}.$$

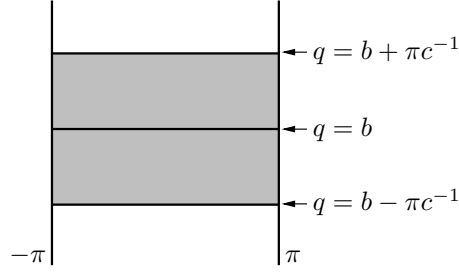


Fig. 6.24. Rectángulo, en el plano $z = \lambda + iq$, donde $F(z) = k \operatorname{tgh}[c(z - z_0)/2]$ es inyectiva.

Por tanto $F(z)$ está definida en el rectángulo del plano z :

$$|\lambda| \leq \pi, \quad |q - b| \leq \pi c^{-1},$$

mostrado en la figura 6.24. Esto justifica la denominación *proyección apolar*.

Proposición 6.7. Sea $F(z)$ la transformación conforme, en forma canónica, de una proyección apolar de exponente $c > 0$. La función característica de $F(z)$ es

$$m(z) = \frac{1}{kc} \left\{ \cos[c(q - b)] + \cosh[c(\lambda - a)] \right\}. \quad (6.40)$$

Las curvaturas de los meridianos y de los paralelos son, respectivamente:

$$\kappa_1 = -k^{-1} \sinh[c(\lambda - a)] \quad y \quad \kappa_2 = -k^{-1} \sin[c(q - b)]. \quad (6.41)$$

Demostración. Al derivar (6.38) obtenemos

$$F'(z) = \frac{kc}{2} \frac{1}{\cosh^2[c(z - z_0)/2]}, \quad (6.42)$$

pues $d \cosh z/dz = \sinh z$ y $d \sinh z/dz = \cosh z$ [Knopp, 1952, § 44]. Luego

$$|F'(z)|^{-1} = \frac{1}{2kc} \left| e^{c(z-z_0)/2} + e^{-c(z-z_0)/2} \right|^2.$$

Al utilizar la identidad $|z + w|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ y tener en cuenta que

$$e^{c(z-z_0)} = e^{c(\lambda-a)} e^{ic(q-b)},$$

se deduce que

$$m(z) = |F'(z)|^{-1} = \frac{1}{2kc} \left\{ e^{c(\lambda-a)} + e^{-c(\lambda-a)} + 2 \operatorname{Re} [e^{ic(q-b)}] \right\}.$$

Esta expresión proporciona (6.40). Las curvaturas de los meridianos y de los paralelos son, por definición: $\kappa_1 = -m_\lambda$ y $\kappa_2 = m_q$, respectivamente. ■

En virtud de la Proposición 6.7, *las constantes fundamentales de las proyecciones apolares son:*

$$a, \quad b, \quad c \quad \text{y} \quad k.$$

Obsérvese que $\kappa_1(a) = 0$ y $\kappa_2(b) = 0$, en virtud de (6.41). Es decir, las imágenes de $\lambda = a$ y de $q = b$ son sendas rectas, como muestra la figura 6.23.

En la forma canónica (6.38) intervienen exclusivamente las constantes fundamentales, y tiene dos propiedades más.

1. La derivada pre-schwarziana de $F(z)$ es

$$P(F) = -\frac{c}{k} F = -c \operatorname{tgh} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right]. \quad (6.43)$$

Por definición, $P(F) = F''/F'$. En virtud de (6.42), se tiene que

$$F'(z) = \frac{c}{2k} [k^2 - F^2(z)], \quad (6.44)$$

luego

$$F''(z) = -\frac{c}{k} F(z) F'(z). \quad (6.45)$$

2. Dados $c > 0$ y z_0 , las funciones

$$F(z) = k \operatorname{tgh} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right], \quad k > 0,$$

resuelven el problema de valor inicial —confróntese con (6.17)—:

$$\begin{cases} S(f) = -c^2/2 \\ f(z_0) = 0, \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f''(z_0) = 0. \end{cases} \quad (6.46)$$

En efecto, al utilizar la definición de la schwarziana (2.34) y la fórmula (6.43), se deduce que

$$S(F) = [P(F)]' - \frac{1}{2} [P(F)]^2 = -c^2/2.$$

Además: $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = kc/2$ en virtud de (6.42), y $F''(z_0) = 0$ según (6.45).

Por último extraemos las fórmulas de las ecuaciones, la escala infinitesimal y la convergencia de meridianos de las proyecciones apolares. Según (6.37) se tiene que $\operatorname{tgh}(z/2) = -i \operatorname{tg}(iz/2)$. Esto y la identidad (6.18) permiten deducir la siguiente:

$$\operatorname{tgh} \frac{z}{2} = \frac{\sinh u}{\cos v + \cosh u} + i \frac{\sin v}{\cos v + \cosh u},$$

donde $z = u + iv$. Por tanto las ecuaciones de la proyecciones apolares asociadas con la forma canónica (6.38), $F(z) = X + iY$, son:

$$\begin{cases} X = k \frac{\sinh [c(\lambda - a)]}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]} \\ Y = k \frac{\sin [c(q - b)]}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]} \end{cases} \quad (6.47)$$

Observación. El distinto factor constante que tienen las ecuaciones (6.47) y (3.23) se debe a la elección de la unidad como factor constante de la función m en la Sección 3.3, mientras que en el presente capítulo la forma canónica, que satisface las condiciones (6.46), conduce al factor constante $(kc)^{-1}$ en (6.40).

La identidad $mr\sigma = 1$ y la fórmula (6.40) proporcionan

$$r\sigma = \frac{kc}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]}.$$

Al utilizar (6.40) y (6.44), obtenemos

$$mF' = \frac{1}{2k^2} \{ \cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)] \} (k^2 - X^2 + Y^2 - i2XY),$$

que, junto con la fórmula (2.52): $\cos \gamma + i \sin \gamma = mF'$, conduce a:

$$\cos \gamma = \frac{1 + \cos [c(q - b)] \cosh [c(\lambda - a)]}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]}$$

y

$$\sin \gamma = -\frac{\sin [c(q - b)] \sinh [c(\lambda - a)]}{\cos [c(q - b)] + \cosh [c(\lambda - a)]}.$$

Meridianos y paralelos

La Proposición 6.6 establece una relación entre las proyecciones apolares y las proyecciones de Lagrange-Lambert, basada en permutar λ y q , que permite concluir lo siguiente: las circunferencias que representan los meridianos

y los paralelos de las apolares coinciden con las que representan los paralelos y los meridianos, respectivamente, de las de Lagrange-Lambert.

De lo anterior se deduce que los meridianos se transforman en circunferencias de Apolonio respecto a los puntos $w_1 = -k$ y $w_2 = +k$ del plano $w = F(z)$, y los paralelos en circunferencias que pasan por w_1 y w_2 , como muestra la figura 6.25.

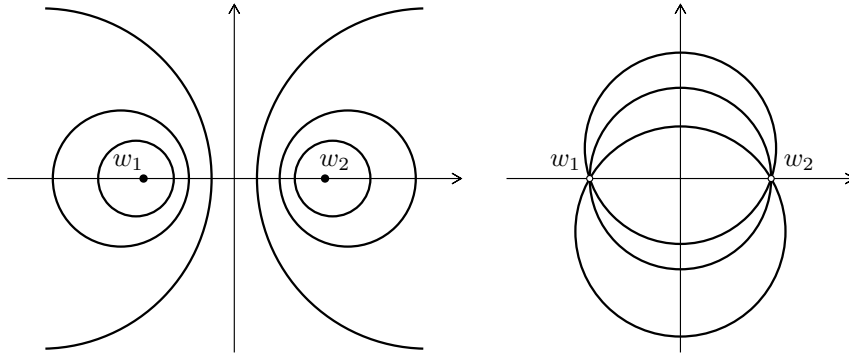


Fig. 6.25. Izquierda: haz de circunferencias de Apolonio respecto a w_1 y w_2 , que representa el conjunto de meridianos. Derecha: haz de circunferencias que pasan por w_1 y w_2 , que contiene los paralelos.

Meridianos. Sabemos que la imagen de $\lambda = a$ es el eje Y . Si $|a| \leq \pi$, entonces dicho meridiano es el único rectilíneo, pues la curvatura es (6.41): $\kappa_1 = -k^{-1} \sinh [c(\lambda - a)]$. En tal caso lo llamamos *meridiano principal*. Obtengamos la ecuación del resto de meridianos. En el plano $w = F(z)$ se tiene que

$$\frac{k + w}{k - w} = e^{c(\lambda - a)} e^{ic(q - b)},$$

en virtud de (6.39), luego

$$\frac{|w - w_1|}{|w - w_2|} = e^{c(\lambda - a)}.$$

Esta ecuación y el Teorema 6.2 proporcionan el centro y el radio de cada meridiano de longitud $\lambda \neq a$:

$$(X - k \cotgh [c(\lambda - a)])^2 + Y^2 = (k \operatorname{cosech} [c(\lambda - a)])^2.$$

Cada meridiano se transforma en una circunferencia de Apolonio respecto a los puntos $w_1 = -k$ y $w_2 = +k$, situada a la izquierda o derecha del eje Y ,

según λ sea menor o mayor que a , respectivamente. Las circunferencias tienen una discontinuidad en el eje X , donde coinciden las latitudes $q = b - \pi c^{-1}$ y $q = b + \pi c^{-1}$. La figura 6.26 resume el análisis realizado.

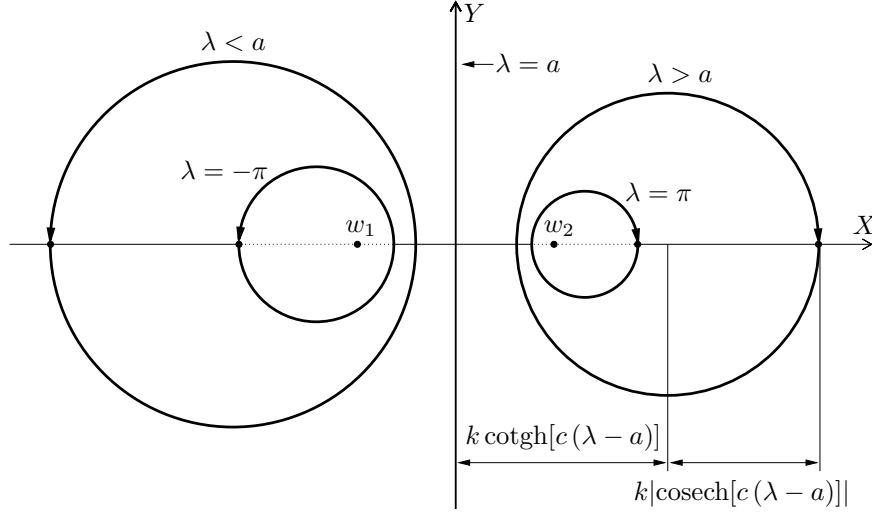


Fig. 6.26. Meridianos de las proyecciones apolares.

Paralelos. Sabemos que una proyección apolar está definida en el rectángulo del plano z : $|\lambda| \leq \pi$, $|q - b| \leq \pi c^{-1}$, mostrado en la figura 6.24. Los únicos paralelos que se transforman en rectas son $q = b$, $q = b + \pi c^{-1}$ y $q = b - \pi c^{-1}$, pues la curvatura es (6.41): $\kappa_2 = -k^{-1} \operatorname{sen}[c(q - b)]$. Como se observa en la figura 6.27, el paralelo $q = b$ se transforma en el segmento del eje X :

$$[k \operatorname{tgh}[c(-\pi - a)/2], k \operatorname{tgh}[c(\pi - a)/2]].$$

El paralelo $q = b + \pi c^{-1}$ se transforma en la orilla superior de las dos semirrectas del eje X :

$$(-\infty, k \operatorname{cotgh}[c(-\pi - a)/2]] \cup [k \operatorname{cotgh}[c(\pi - a)/2], +\infty),$$

y $q = b - \pi c^{-1}$ en la orilla inferior de dichas semirrectas. Lo anterior se deduce de las ecuaciones (6.47) y las identidades

$$\frac{\operatorname{senh} x}{1 + \cosh x} = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}, \quad \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x - 1} = \operatorname{cotgh} \frac{x}{2}.$$

Para obtener la ecuación de un paralelo, observamos que el radio de la circunferencia que lo representa es $R = k|\operatorname{cosec}[c(q - b)]|$, en virtud de (6.41).

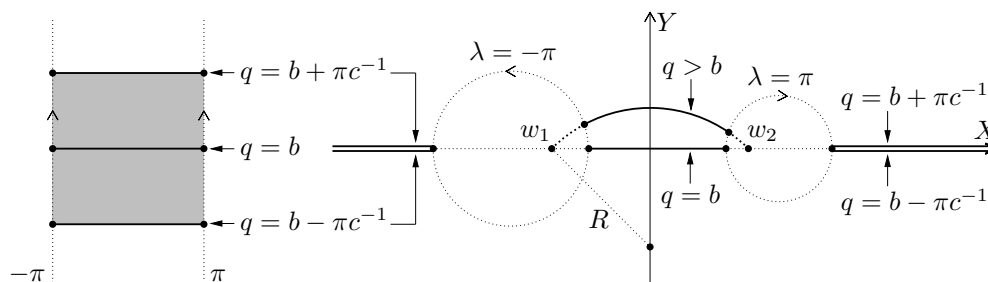


Fig. 6.27. Imágenes de los paralelos $q = b$, $q = b + \pi c^{-1}$, $q = b - \pi c^{-1}$ y $q > b$.

Además la distancia, d , desde el origen de coordenadas hasta el centro de la circunferencia satisface —figura 6.27—:

$$d^2 = R^2 - k^2 = k^2 \cotg^2 [c(q - b)].$$

Por tanto

$$X^2 + (Y + k \cotg [c(q - b)])^2 = (k \operatorname{cosec} [c(q - b)])^2$$

es la ecuación del paralelo de latitud $q \in (b - \pi c^{-1}, b) \cup (b, b + \pi c^{-1})$. Su imagen es un arco circular situado encima o debajo del eje X , según q sea mayor o menor que b , respectivamente. Los extremos del arco están en las dos circunferencias imágenes de los meridianos $\lambda = -\pi$ y $\lambda = \pi$. La figura 6.28 resume el análisis realizado.

Mapas

Tissot [1881, Complément, § 121, figura 17] dibuja la red de meridianos y paralelos de una proyección apolar de exponente $c = 1$. Brown [1935, p. 221, figura 4'] presenta un mapa de las proyecciones apolares, consideradas como solución del Problema de Lagrange.

Los cuatro mapas que presentamos a continuación —figuras 6.29 a 6.32— cierran nuestro análisis de las proyecciones apolares y también el presente capítulo. En su construcción hemos considerado la transformación conforme $F(z) = \operatorname{tgh} [c(z - z_0)/2]$, $z_0 = a + ib$, pues la constante k solo altera el tamaño del mapa. La red de meridianos y paralelos tiene 15° .

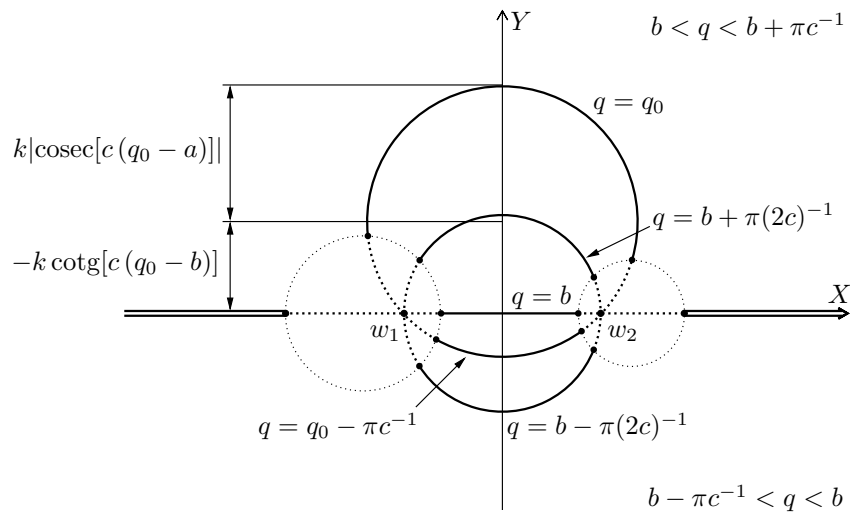


Fig. 6.28. Paralelos de las proyecciones apolares.

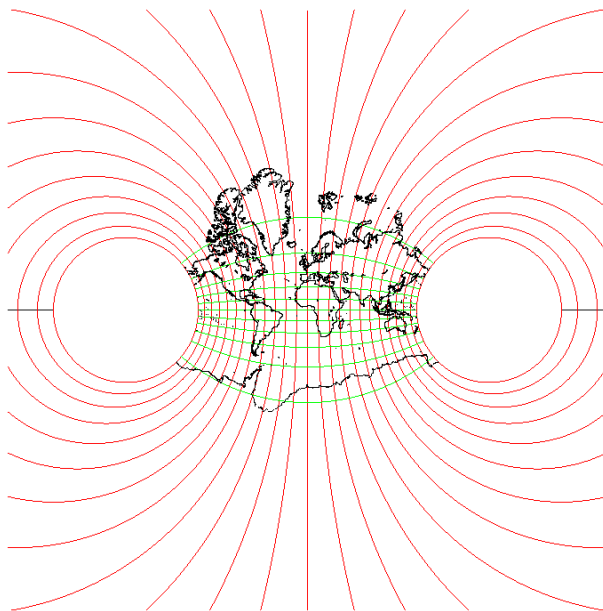


Fig. 6.29. Mapa de la proyección apolar de exponente $c = 1/2$, con $a = b = 0$; $F(z) = \operatorname{tgh}(z/4)$.

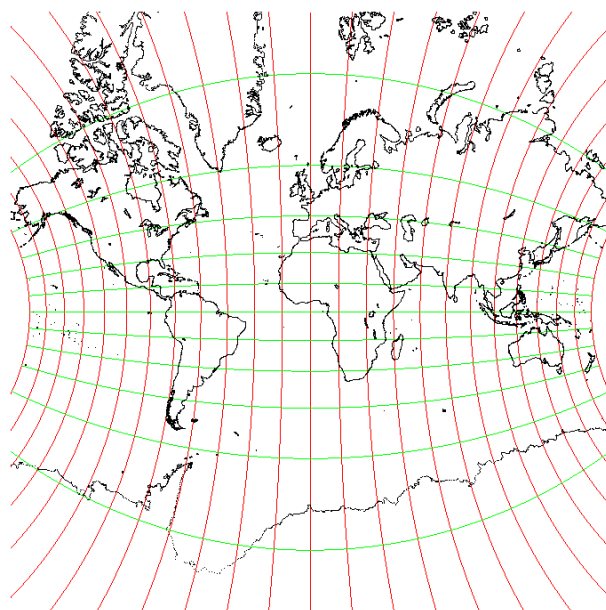


Fig. 6.30. Detalle del mapa de la figura 6.29.

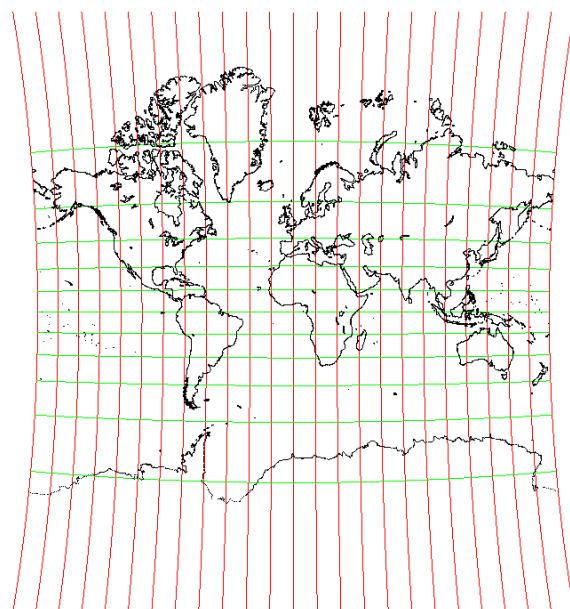


Fig. 6.31. Mapa de la proyección apolar de exponente $c = 1/6$, con $a = b = 0$; $F(z) = \operatorname{tgh}(z/12)$. Obsérvese su parecido con el mapa de la proyección de Mercator.

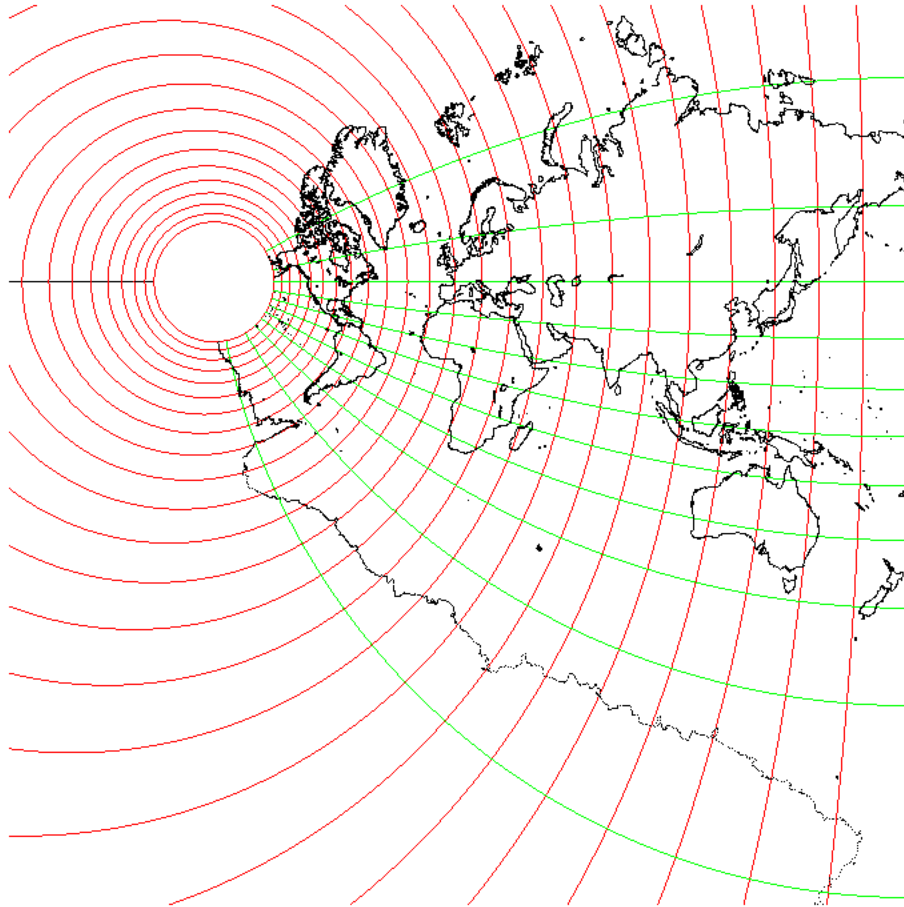


Fig. 6.32. Mapa de la proyección apolar de exponente $c = 1/2$, con $a = \pi$ y $b = 0.88$; $F(z) = \operatorname{tgh} [(z - \pi - 0.88i) / 4]$. El meridiano principal es $\lambda = \pi$ y el paralelo rectilíneo de latitud $q = b$ se corresponde con 45° norte.

Capítulo 7

Puntos geodésicos de proyecciones conformes

Construimos la teoría de puntos geodésicos de proyecciones conformes, relacionada con la optimización de proyecciones conformes, que estudiamos en el Capítulo 8. Aplicamos dicha teoría a las proyecciones de Mercator, cónica conforme de Lambert, estereográfica y transversa de Mercator. Después hacemos lo propio con la familia de proyecciones de Lagrange-Lambert, cuestión más compleja cuyo análisis proporciona los elementos necesarios para la optimización de esta familia en el Capítulo 8.

Lagrange dedica su Segunda memoria al análisis y optimización local de las proyecciones de Lagrange-Lambert. Resulta oportuno reproducir íntegramente la última sección que cierra su Primera memoria [Lagrange, 1779, § 20]:

Así pues hemos resuelto de un modo general el Problema geográfico del que la proyección estereográfica no proporciona más que una solución particular. Lo que hace esta proyección tan útil para la construcción de Mapas son las dos propiedades de las que hemos hecho mención al comienzo de esta Memoria, y que consisten: 1.º en que cada parte de la superficie de la Tierra tiene en el Mapa una forma semejante a la que tiene en la Tierra, y no se altera más que en su tamaño; 2.º en que todos los meridianos y paralelos de la Tierra se encuentran representados en el Mapa por circunferencias. Hemos tomado estas dos condiciones como los datos del Problema, y hemos llegado a una solución general que contiene necesariamente todas las formas posibles de satisfacer esas mismas condiciones. Como hay varias consecuencias a extraer de esta solución, las desarrollaremos en la continuación de estas Investigaciones, que será el objeto de una segunda Memoria.

7.1. Optimización local de proyecciones conformes

Sea Ω una región del elipsoide de revolución Σ . *Optimizar una familia de proyecciones conformes sobre Ω* consiste en determinar las constantes fundamentales significativas de modo que la escala infinitesimal difiera en Ω lo menos posible de una función constante, en el sentido de que sea mínima (lo más próximo posible a la unidad) la razón entre sus valores máximo y mínimo —véase [Chebyshev, 1856a] y [Milnor, 1969, Apéndice B]—. Por consiguiente *no consideramos significativa la constante que es un factor de escala*.

La optimización puede ser *global* como cuando, por ejemplo, se plantea la pregunta: ¿cuál es la mejor proyección estereográfica sobre España? En este caso la familia a optimizar está formada por las proyecciones estereográficas, que depende de dos parámetros: las coordenadas del centro de la proyección.

La optimización también puede ser *local* cuando se plantea sobre el entorno de un punto (un disco geodésico de radio *pequeño*, por ejemplo). Se utiliza con frecuencia en cartografía; el caso quizá más relevante sea el de la proyección cónica conforme de Lambert con un paralelo estándar o automecoico (se conservan las distancias). Es auxilio para la optimización global pues esta es un procedimiento iterativo que requiere valores iniciales de las constantes, que se obtienen fácilmente con métodos de optimización local basados en el desarrollo en serie de Taylor.

Nota histórica. Lambert [1772, Capítulo IV, §§ 47-57] construye las proyecciones cónicas conformes que llevan su nombre y después impone, con otra notación y lenguaje, la condición de que la escala infinitesimal sea constante en una franja infinitesimal alrededor de un paralelo de latitud φ [§ 51]. Esto equivale a

$$\frac{d}{dq}\sigma(\varphi) = 0.$$

En la esfera se tiene (4.6): $\sigma = k|c|\exp(-cq)\cosh q$. La condición anterior equivale a la ecuación $c = \tanh q$, es decir,

$$c = \sin \varphi.$$

Este resultado, obtenido por Lambert, determina la constante fundamental significativa.

En este capítulo trabajamos con la función $g = \log \sigma$ porque facilita cálculos y, fundamentalmente, porque es solución de la ecuación en derivadas parciales:

$$\Delta g = r^2 K_G, \tag{7.1}$$

donde K_G es la curvatura de Gauss de Σ —véase (1.4)—. En efecto, se tiene que $\Delta g = -\Delta \log r$, en virtud de (2.10): $mr\sigma = 1$, y de la Proposición 2.1

que establece que la función $\log m$ es armónica. Por otra parte

$$K_G = -\frac{1}{r^2} \Delta \log r, \quad (7.2)$$

fórmula obtenida por Gauss para una superficie cualquiera —véase [Dombrowski, 1979, p. 128, ecuación (54)]—. La expresión (7.1) establece una relación entre las segundas derivadas puras de g y muestra que esta función es subarmónica, luego alcanza su valor máximo en la frontera del dominio de definición.

Sea x un punto de Σ . Según la fórmula de Schols-Laborde (2.62), la curvatura de la imagen de una geodésica del elipsoide mediante una proyección conforme es

$$K(x, \alpha) = -m(x) \langle \nabla g(x), \mathbf{n}(\alpha) \rangle, \quad (7.3)$$

donde α es el acimut de la geodésica que pasa por x y $\mathbf{n}(\alpha) = (-\cos \alpha, \sin \alpha)$ es el vector unitario normal. En optimización de proyecciones conformes, el caso ideal es que g fuera idénticamente constante. Esto equivale, según (7.3), a que K fuera idénticamente nula, es decir, la proyección conforme sería una *representación geodésica*, aquella que transforma las geodésicas del elipsoide en rectas [Kreyszig, 1968, §§ 64 y 91].

Aunque una proyección conforme no puede ser simultáneamente una representación geodésica, en la mayoría existen puntos singulares x_0 tales que

$$K(x_0, \alpha) = 0, \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 2\pi). \quad (7.4)$$

Basados en esta propiedad, decimos que $x \in \Sigma$ es un *punto geodésico de una proyección conforme* p si x pertenece al dominio de la proyección y la curvatura en $p(x)$ de todas las geodésicas que pasan por x es igual a cero. En virtud de (7.3), *los puntos geodésicos coinciden con los puntos críticos de la función g* , sean ya extremos, ya estacionarios.

Proyección estereográfica general. Supongamos, para simplificar, que está en aspecto polar (norte) en la esfera unidad. En virtud de (2.3) se tiene que $g = \log [1 + \exp(-2q)]$, luego

$$\nabla g = (0, -2/(1 + e^{2q})) = (0, \sin \varphi - 1) = \mathbf{0} \quad \text{si y solo si} \quad \varphi = \pi/2.$$

Si aplicamos este resultado, concluimos que *la proyección estereográfica general tiene un único punto geodésico que coincide con el centro de la proyección*, véase la figura 7.1. Excepto en aspecto polar, los polos geográficos no son puntos geodésicos. En efecto, las geodésicas que pasan por ambos polos son los meridianos y la estereográfica los transforma en circunferencias —figura 7.1— cuya curvatura es constante distinta de cero. ■

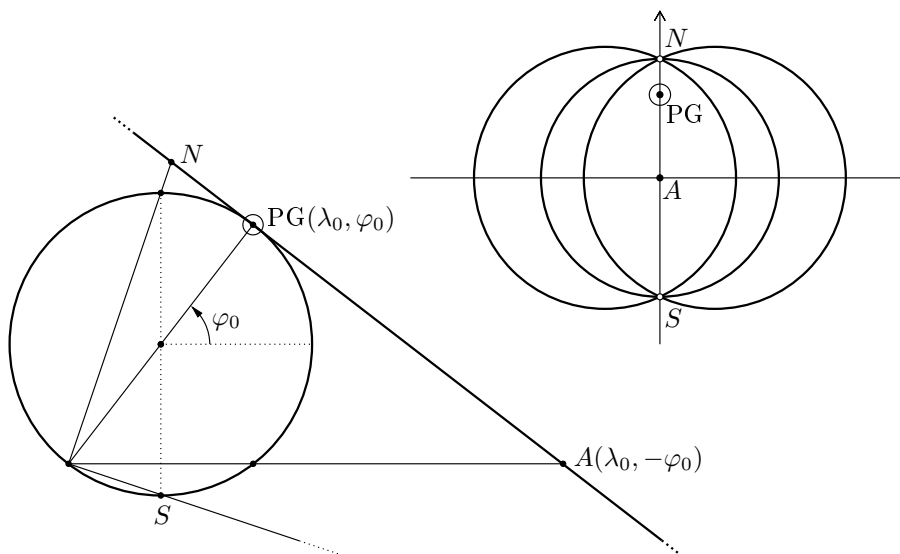


Fig. 7.1. La proyección estereográfica centrada en (λ_0, φ_0) tiene un único punto geodésico (PG) que coincide con su centro.

La proyección acimutal equidistante y la estereográfica. La mejor proyección conforme sobre un disco geodésico es la estereográfica centrada en el centro del disco [Otero, 1997, p. 484, Ejemplo 3.2]. En este sentido, es la proyección conforme más próxima a la acimutal equidistante, que es la proyección de distorsión mínima sobre discos geodésicos [Milnor, 1969, § 2, Lemas 1 y 2]. La distorsión de una proyección cartográfica está definida por Milnor [1969, § 1] como el logaritmo de la razón del máximo de los semiejes mayores y el mínimo de los semiejes menores de las elipses de Tissot.

La estereográfica está más cerca de la acimutal equidistante cuando menor es el radio del disco, es decir, cuando más cerca estamos del punto geodésico. En efecto, la distorsión de la proyección acimutal equidistante sobre un disco geodésico de radio ψ es $\delta_1 = \log(\psi / \sin \psi)$ [Milnor, 1969, § 2, Lema 3]. En la estereográfica se tiene que $\sigma = \sec^2(\psi/2)$ en virtud de (1.16), luego la *amplitud* de la función g , $\max g - \min g$, es $\delta_2 = 2 \log(\sec(\psi/2))$. Se comprueba que

$$\delta_1 - \delta_2 = \log\left(\frac{\psi}{2} \cotg \frac{\psi}{2}\right).$$

Por ejemplo, si $\psi = 10^\circ$ entonces $|\delta_1 - \delta_2| = 0.0025$. ■

La definición de punto geodésico señala el carácter acimutal de una proyección conforme sobre un disco geodésico de radio *pequeño* centrado en un punto geodésico —véase la figura 7.2—. Entonces se asemeja a la proyección estereográfica centrada en dicho punto. Se concluye que *una proyección con-*

forme es óptima en sus puntos geodésicos. Además, $\sigma(x) = 1$ en aproximación lineal, suponiendo sin pérdida de generalidad que $\sigma(x_0) = 1$; esto demuestra la equivalencia con la estereográfica en este orden de aproximación.

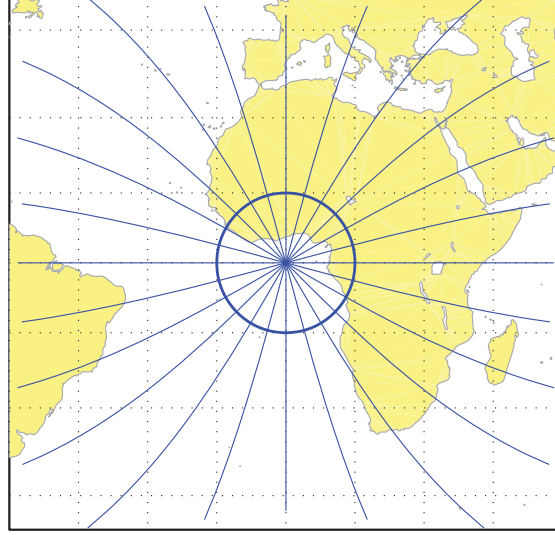


Fig. 7.2. Proyección de Mercator. Haz de geodésicas que pasan por el punto geodésico $(\lambda, \varphi) = (0, 0)$ en intervalo de acimut de 15° . El disco geodésico de radio 15° centrado en dicho punto muestra el carácter acimutal. (La red de meridianos y paralelos tiene 15° .)

Proyección de Mercator. Aquí se tiene que $g = \log \cosh q$ en la esfera unidad, luego $\nabla g = (0, \tanh q) = \mathbf{0}$ si y solo si $q = 0$. Por tanto *los puntos geodésicos de la proyección de Mercator son los puntos del ecuador* —véase la figura 7.2—. En esta proyección, la curvatura de la imagen de una geodésica es (2.61): $K = -\sin \varphi \sin \alpha$, que se anula si $\varphi = 0$ para todo $\alpha \in [0, 2\pi)$. La amplitud de g sobre un disco geodésico de radio φ centrado en un punto del ecuador es $\delta_1 = \log \sec \varphi$. En la estereográfica ecuatorial centrada en $(\lambda_0, q_0) = (0, 0)$ la escala infinitesimal es

$$\sigma = \frac{2 \cosh q}{\cos \lambda + \cosh q} = \frac{2}{1 + \cos \lambda \cos \varphi},$$

en virtud de (1.37). La respectiva amplitud de g sobre un disco geodésico centrado en $(0, 0)$ es $\delta_2 = \log [2/(1 + \cos \varphi)]$. Se comprueba que

$$\delta_1 - \delta_2 = \log [(1 + \sec \varphi)/2].$$

Por ejemplo, si $\varphi = 5^\circ$ entonces $|\delta_1 - \delta_2| = 0.0019$. ■

A continuación establecemos una caracterización de los puntos geodésicos que utilizaremos a lo largo del presente capítulo.

Teorema 7.1. *Sea p una proyección conforme en coordenadas (λ, q) . Un punto x_0 , perteneciente al dominio de p , es un punto geodésico de p si y solo si*

$$\nabla \log m(x_0) = (0, \operatorname{sen} \varphi_0), \quad (7.5)$$

o en términos de la derivada pre-schwarziana:

$$P(f)(z_0) = i \operatorname{sen} \varphi_0. \quad (7.6)$$

Demostración. La función g se descompone del siguiente modo:

$$g = -\log m - \log r, \quad (7.7)$$

en virtud de la identidad $mr\sigma = 1$. Por consiguiente

$$\nabla g = -\nabla \log m + (0, \operatorname{sen} \varphi),$$

pues $r_q = -r \operatorname{sen} \varphi$ según (2.60). Se deduce que x_0 es un punto geodésico si y solo si

$$\nabla \log m(x_0) = (0, \operatorname{sen} \varphi_0).$$

La fórmula (2.20):

$$P(f) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \log m + i \frac{\partial}{\partial q} \log m,$$

completa la demostración. ■

Observación. La identidad (2.23): $mP(f) = \kappa_1 + i\kappa_2$, permite expresar la condición (7.6) del siguiente modo:

$$\kappa_1(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad \kappa_2(x_0) = m(x_0) \operatorname{sen} \varphi_0.$$

Por tanto una condición necesaria para que un punto sea geodésico es que la curvatura de la imagen de su meridiano sea igual a cero. (Este resultado no sorprende si se tiene en cuenta que un meridiano es una geodésica del elipsoide.) Por ejemplo, si la proyección transversa de Mercator tiene puntos geodésicos, estos se encuentran necesariamente en los cuatro meridianos $\lambda \in \{0, \pm\pi/2, \pi\}$, pues $\kappa_1(x) = m^{-1} \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda$ según (2.51).

Proyecciones de Lagrange rectilíneas. Este conjunto de proyecciones, estudiado en el Capítulo 4, está caracterizado por la ecuación $P(f) = a + ib$, con $ab = 0$. Lo componen tres familias de proyecciones:

$$\begin{cases} \text{Cilíndricas conformes: } P(f) = 0, \\ \text{Cónicas y acimutales conformes: } P(f) = ic, \\ \text{Pseudopolares: } P(f) = c, \end{cases}$$

con c real distinto de cero. Apliquemos el Teorema 7.1.

En las cilíndricas conformes se tiene que x_0 es un punto geodésico si y solo si $\sin \varphi_0 = 0$, es decir, x_0 pertenece al ecuador (véase más arriba el análisis de la proyección de Mercator).

En las cónicas y acimutales conformes los puntos geodésicos son los del paralelo $\varphi_0 = \arcsen c$, que existen siempre que $|c| \leq 1$ (véase más arriba la nota histórica sobre la aportación de Lambert).

Las proyecciones pseudopolares no tienen puntos geodésicos. ■

La *aproximación cuadrática* de g en un punto geodésico x_0 es

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2!} (x - x_0)^T Hg(x_0) (x - x_0), \quad (7.8)$$

donde $x = (\lambda, q)^T$, $x_0 = (\lambda_0, q_0)^T$ y $Hg(x_0)$ es la hessiana o matriz de las segundas derivadas de g en x_0 . Si dicha matriz fuera nula, entonces el comportamiento de g en un entorno de x_0 sería semejante al del caso ideal: g idénticamente constante. Por ejemplo, en la proyección estereográfica en aspecto polar (esfera unidad) se tiene $g = \log[1 + \exp(-2q)]$, luego

$$Hg(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es nula en $\varphi = \pi/2$, el único punto geodésico de la proyección.

Obtengamos una fórmula general para la matriz $Hg(x_0)$. Según (7.7) se tiene que

$$H(g) = H(\log(1/r)) - H(\log m).$$

El primer término, en virtud de (7.2), es

$$H(\log(1/r)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^2 K_G \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

El segundo es

$$H(\log m)(x_0) = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} m_{\lambda\lambda} & m_{\lambda q} \\ m_{\lambda q} & -m_{\lambda\lambda} \end{bmatrix},$$

porque $m_\lambda(x_0) = -\kappa_1(x_0) = 0$ y $\log m$ es una función armónica. Debido a su utilidad expresamos los elementos de esta matriz en función de la schwarziana en un punto geodésico x_0 , que llamamos $S_0 = S(f)(z_0)$. La condición (7.5)

implica que $\nabla m(x_0) = (0, m \operatorname{sen} \varphi_0)$ y, por otra parte, se tiene la identidad (2.11): $m \Delta m = |\nabla m|^2$, luego

$$m_{\lambda\lambda} + m_{qq} = m \operatorname{sen}^2 \varphi_0. \quad (7.10)$$

También disponemos de la identidad (2.38):

$$mS(f) = \frac{1}{2} (m_{qq} - m_{\lambda\lambda}) + im_{\lambda q}.$$

Al introducir (7.10) en esta última identidad, obtenemos:

$$\frac{1}{m} m_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 - \operatorname{Re} S_0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{m} m_{\lambda q} = \operatorname{Im} S_0.$$

En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 7.2. *Sean p una proyección conforme en coordenadas (λ, q) y x_0 un punto geodésico de p . La hessiana del logaritmo de la función característica de p en x_0 es*

$$H(\log m)(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 - \operatorname{Re} S_0 & \operatorname{Im} S_0 \\ \operatorname{Im} S_0 & \operatorname{Re} S_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \end{bmatrix}$$

y la hessiana de $g = \log \sigma$, en el mismo punto, es

$$Hg(x_0) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} S_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 & -\operatorname{Im} S_0 \\ -\operatorname{Im} S_0 & r_0^2 K_G - \left(\operatorname{Re} S_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \right) \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Los siguientes cuatro ejemplos ilustran este teorema. Anteriormente hemos obtenido los puntos geodésicos de los tres primeros. Consideramos la esfera unidad, luego $r = \cos \varphi$ y $K_G = 1$. Para simplificar la notación escribimos $H(x_0)$ o simplemente H , en lugar de $Hg(x_0)$, cuando no haya lugar a confusión.

1. Proyección de Mercator. Los puntos geodésicos son los puntos del ecuador. Como $g = \log(1/r)$, entonces $H(x_0)$ coincide con la matriz (7.9) evaluada en el punto geodésico x_0 , es decir:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que H es constante en todos los puntos geodésicos. ■

2. Proyección cónica conforme de Lambert. Los puntos geodésicos son los del paralelo $\varphi_0 = \arcsen c$, si $|c| \leq 1$. Las proyecciones cónicas y acimutales conformes tienen la propiedad: $S(f)(z) = c^2/2$, véase la Sección 3.5. Por tanto la matriz (7.11) es

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que H es nula si y solo si $|c| = 1$, caso que se corresponde con la proyección acimutal conforme. ■

3. Proyección estereográfica general. Su único punto geodésico es el centro de la proyección $x_0 = (\lambda_0, q_0)$. En virtud de (2.46) se tiene que $S(f)(z) = 1/2$ para todo z . Entonces

$$H = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 I_2$$

donde I_2 es la matriz identidad de orden dos. La matriz H es nula solo en el caso de la estereográfica en aspecto polar. ■

4. Proyección transversa de Mercator. Determinemos primero sus puntos geodésicos. En esta proyección se tiene (2.53): $P(f) = \operatorname{tg} z$. Según el Teorema 7.1, x_0 es un punto geodésico si y solo si

$$\operatorname{tg} z_0 = i \operatorname{sen} \varphi_0, \quad (7.12)$$

es decir, si y solo si

$$\frac{\operatorname{sen}(2\lambda_0)}{\cos(2\lambda_0) + \cosh(2q_0)} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{senh}(2q_0)}{\cos(2\lambda_0) + \cosh(2q_0)} = \operatorname{sen} \varphi_0,$$

en virtud de (6.18). Téngase en cuenta que los puntos excluidos del dominio de definición son $(\lambda, q) = (\pm\pi/2, 0)$. La primera ecuación se cumple si y solo si $\lambda_0 \in \{0, \pi/2, -\pi/2, \pi\}$. La segunda equivale a

$$\frac{\operatorname{senh}(2q_0)}{1 + \cosh(2q_0)} = \operatorname{tgh} q_0, \quad \text{si } \lambda_0 \in \{0, \pi\}, \quad (7.13)$$

o

$$\frac{\operatorname{senh}(2q_0)}{\cosh(2q_0) - 1} = \operatorname{tgh} q_0, \quad \text{si } \lambda_0 \in \{\pi/2, -\pi/2\}. \quad (7.14)$$

La condición (7.13) es una identidad, mientras que la ecuación (7.14) equivale a $\operatorname{tgh}^2 q_0 = 1$, que no tiene solución porque $|\operatorname{tgh} x| < 1$ para todo x real. Se concluye que *los puntos geodésicos de la transversa de Mercator son los*

puntos de los meridianos $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_0 = 180^\circ$. Calculemos $H(x_0)$. A partir de (2.54) y (7.12) se obtiene

$$S_0 = S(f)(z_0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 z_0 = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0,$$

luego

$$H = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

Observamos que H se anula en los dos polos terrestres. Por tanto la hessiana de la transversa de Mercator, en dichos puntos, coincide con la de la estereográfica en aspecto polar —véase el ejemplo anterior—. Esto señala un comportamiento semejante entre sí de estas dos proyecciones en los polos; en la figura 7.3 confrontamos sus mapas. ■

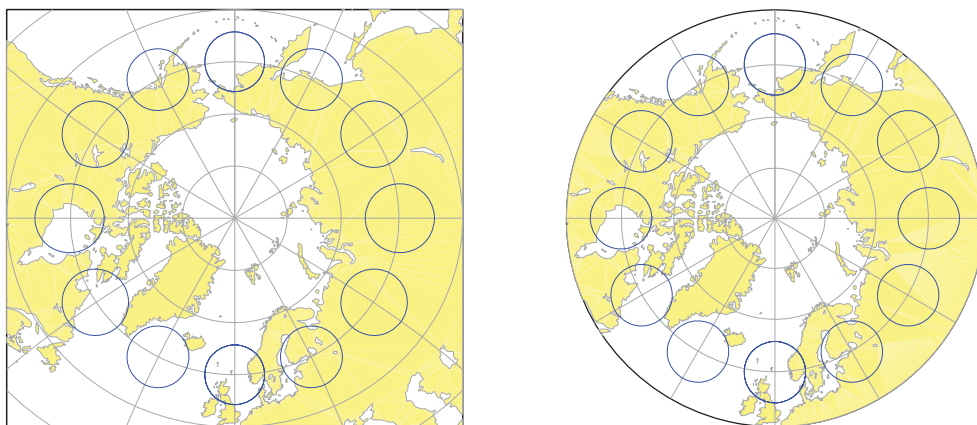


Fig. 7.3. Proyecciones transversa de Mercator (izquierda) y estereográfica en aspecto polar (derecha) en el entorno del polo norte, punto geodésico donde H es la matriz nula, en ambos casos. Hemos añadido imágenes de discos geodésicos. (Meridianos: 30° ; paralelos: 10° .)

Notación para los puntos geodésicos

La matriz $H(x_0)$ no es en ningún caso ni definida ni semidefinida negativa, porque su traza es $\Delta g(x_0) = r_0^2 K_G$. Entonces existen tres posibilidades: H definida positiva, H semidefinida positiva y H no definida. Clasifiquemos los puntos geodésicos según este criterio.

- *Elíptico* si $H(x_0)$ es definida positiva, es decir, si sus dos autovalores son positivos.

- *Parabólico* si $H(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir, si uno de sus autovalores es cero.
- *Hiperbólico* si $H(x_0)$ es no definida, es decir, si tiene un autovalor positivo y otro negativo.

Los cuatro ejemplos que siguen son una continuación de los últimos realizados, donde obtuvimos la matriz $H(x_0)$ en la esfera unidad.

1. Proyección de Mercator. Los autovalores de H son 0 y 1, luego todos sus puntos geodésicos (el ecuador) son parabólicos.

2. Cónica conforme de Lambert. Los autovalores de H son 0 y $\cos^2 \varphi_0$. Todos sus puntos geodésicos (el paralelo $\varphi_0 = \arcsen c$) son parabólicos.

3. Estereográfica general. La matriz H tiene autovalor $(\cos^2 \varphi_0)/2$ con multiplicidad dos. Excepto en aspecto polar, donde H es nula, su único punto geodésico (el centro de la proyección (λ_0, φ_0)) es elíptico.

4. Transversa de Mercator. Los autovalores de H son $\cos^2 \varphi_0$ y 0. Excepto en los polos, donde H es nula, todos sus puntos geodésicos (los meridianos $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_0 = 180^\circ$) son parabólicos. ■

La razón de esta denominación: punto geodésico elíptico, parabólico e hiperbólico, reside en el comportamiento que tiene la aproximación cuadrática (7.8) de g en x_0 . Como $H(x_0)$ es una matriz real y simétrica, entonces

$$H = RAR^T, \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

y R es la matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 (unitarios y ortogonales) asociados con los autovalores de H : μ_1 y μ_2 . Esto conduce a una expresión muy sencilla de la aproximación cuadrática de g .

Proposición 7.1. Sean p una proyección conforme en coordenadas (λ, q) y x_0 un punto geodésico de p . La aproximación cuadrática de $g = \log \sigma$ en x_0 es

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2} (\mu_1 X^2 + \mu_2 Y^2), \quad (7.17)$$

donde (X, Y) son las coordenadas de x en el sistema de referencia asociado con la base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y con origen en x_0 .

Demostración. La forma cuadrática asociada con la hessiana $Hg(x_0)$ es

$$Q_H(x) = x^T H x = (R^T x)^T A (R^T x),$$

donde hemos utilizado la descomposición (7.16). Según (7.8), la aproximación cuadrática de g en un punto geodésico x_0 es

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2} Q_H(x - x_0) = g(x_0) + \frac{1}{2} y^T A y,$$

con $y = R^T (x - x_0)$. Finalmente, si llamamos $y = (X, Y)^T$, entonces

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2} (\mu_1 X^2 + \mu_2 Y^2).$$

Además, $x = x_0 + Ry$, luego $x = x_0 + X\mathbf{v}_1 + Y\mathbf{v}_2$. ■

De (7.17) se deduce que los autovalores de $H(x_0)$: μ_1 y μ_2 , determinan el tipo de superficie asociada con $Q(x)$. Veamos que hay tres: paraboloides elíptico, cilindro parabólico y paraboloides hiperbólico (todas son cuádricas), lo que justifica la denominación de los puntos geodésicos.

1. Punto geodésico elíptico

Por definición, μ_1 y μ_2 son estrictamente positivos. Según (7.16) se tiene que $g_{\lambda\lambda}(x_0) = \mu_1 a_{11}^2 + \mu_2 a_{12}^2 > 0$, donde (a_{11}, a_{12}) es la primera fila de la matriz R , y también que $\det H = \mu_1 \mu_2 > 0$. Por tanto *cualquier punto geodésico elíptico es un mínimo relativo de g* [Marsden y Tromba, 1991, § 4.2, Teorema 5]. La aproximación cuadrática de g es (7.17):

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{X^2}{\mu_1^{-1}} + \frac{Y^2}{\mu_2^{-1}} \right).$$

Esta ecuación representa un *paraboloides elíptico*, de revolución si $\mu_1 = \mu_2$, que se muestra en la figura 7.4. Las elipses centradas en x_0 :

$$\frac{X^2}{\mu_1^{-1}} + \frac{Y^2}{\mu_2^{-1}} = 2\varepsilon^2, \quad \text{con } \varepsilon^2 = g(x) - g(x_0) > 0,$$

son la aproximación de segundo orden de las curvas de nivel de g en x_0 . Los semiejes de estas elipses son:

$$a = \sqrt{2} \varepsilon \max \left\{ \mu_1^{-1/2}, \mu_2^{-1/2} \right\} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{2} \varepsilon \min \left\{ \mu_1^{-1/2}, \mu_2^{-1/2} \right\},$$

orientados según los autovectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 asociados con los autovalores.

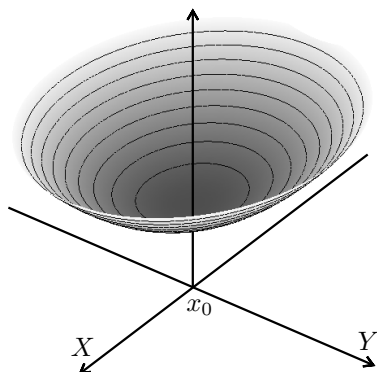


Fig. 7.4. El paraboloide elíptico es la aproximación cuadrática de g en un punto geodésico elíptico x_0 .

2. Punto geodésico parabólico

Uno de los autovalores es cero. Como $\det H = \mu_1\mu_2 = 0$, se requiere más análisis para conocer la naturaleza del punto geodésico (extremo relativo o punto silla). La aproximación cuadrática de g es

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}\mu_1 X^2 \quad \text{o} \quad Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}\mu_2 Y^2,$$

que representa, en ambos casos, un *cilindro parabólico* —véase la figura 7.5—. Las ramas de las parábolas miran siempre hacia arriba porque el autovalor no nulo debe ser positivo. Las rectas

$$X = \pm(2\varepsilon/\mu_1)^{1/2},$$

paralelas a la dirección del autovector \mathbf{v}_2 , o las rectas

$$Y = \pm(2\varepsilon/\mu_2)^{1/2},$$

paralelas a la dirección del autovector \mathbf{v}_1 , con $\varepsilon = g(x) - g(x_0)$, son la aproximación de segundo orden de las curvas de nivel de g en x_0 .

3. Punto geodésico hiperbólico

Un autovalor es positivo y el otro negativo. Como $\det H = \mu_1\mu_2 < 0$, entonces *cualquier punto geodésico hiperbólico es un punto silla de g* [Marsden y Tromba, 1991, § 4.2, Teorema 5 y comentarios]. Supongamos que $\mu_1 > 0$ (el otro caso es semejante), luego la aproximación cuadrática de g es

$$Q(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}(\mu_1 X^2 - |\mu_2| Y^2).$$

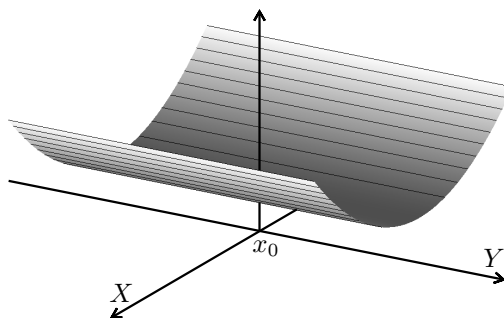


Fig. 7.5. El cilindro parabólico es la aproximación cuadrática de g en un punto geodésico parabólico x_0 .

Esta ecuación representa un *paraboloide hiperbólico* o *silla de montar*, mostrado en la figura 7.6. Las hipérbolas

$$\frac{X^2}{\mu_1^{-1}} - \frac{Y^2}{|\mu_2|^{-1}} = 2\varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon = g(x) - g(x_0),$$

son la aproximación de segundo orden de las curvas de nivel de g en x_0 .

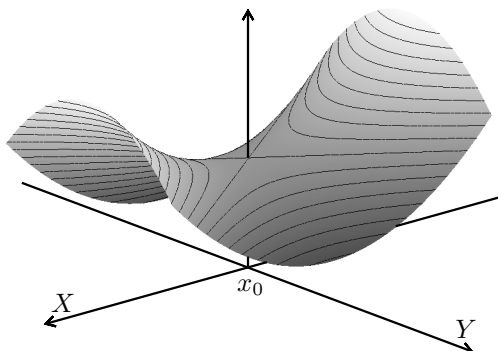


Fig. 7.6. El paraboloide hiperbólico es la aproximación cuadrática de g en un punto geodésico hiperbólico x_0 .

Ejemplos finales. Los siguientes cuatro ejemplos, en la esfera unidad, recogen resultados obtenidos a lo largo de esta sección y añaden la aproximación cuadrática (7.17) de g en un punto geodésico $x_0 = (\lambda_0, q_0)$. En los cuatro casos la matriz $H(x_0)$ es diagonal, luego los autovectores son $\mathbf{v}_1 = (1, 0)^T$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 1)^T$, es decir, $X = \lambda - \lambda_0$ e $Y = q - q_0$.

1. Proyección de Mercator.

Puntos geodésicos: el ecuador.

Parabólicos. $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$.

$$Q(\lambda, q) = q^2/2.$$

2. Proyección cónica conforme de Lambert.

Puntos geodésicos: el paralelo $\varphi_0 = \arcsen c$, si $|c| \leq 1$.

Parabólicos. $\mu_1 = 0, \mu_2 = \cos^2 \varphi_0 = 1 - c^2$.

$$Q(\lambda, q) = g(x_0) + (1 - c^2)(q - q_0)^2/2.$$

3. Proyección estereográfica general.

Punto geodésico: el centro de la proyección (λ_0, φ_0) .

Elíptico. $\mu_1 = \mu_2 = (\cos^2 \varphi_0)/2$.

$$Q(\lambda, q) = \operatorname{sech}^2 q_0 [(\lambda - \lambda_0)^2 + (q - q_0)^2]/4.$$

En aspecto polar: $Q(x) = 0$.

4. Proyección transversa de Mercator.

Puntos geodésicos: los meridianos $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_0 = 180^\circ$.

Parabólicos. $\mu_1 = \cos^2 \varphi_0, \mu_2 = 0$.

$$Q(\lambda, q) = \operatorname{sech}^2 q_0 \lambda^2/2, \text{ en } \lambda_0 = 0.$$

En los polos terrestres: $Q(x) = 0$. ■

7.2. Existencia y determinación en las proyecciones de Lagrange-Lambert

Los cuatro ejemplos que han cerrado la sección anterior no cubren todos los tipos de puntos geodésicos. En las proyecciones de Lagrange-Lambert sí aparecen los tres tipos: elíptico, parabólico e hiperbólico.

Esta familia de proyecciones —consúltese la Sección 6.2— está asociada con la función (6.15):

$$L(z) = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - \alpha) \right],$$

donde $k > 0, c > 0$ es el exponente de la proyección y $\alpha = a + ib$ es el centro de la proyección. La escala infinitesimal satisface:

$$r\sigma = \frac{kc}{\cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)]}. \quad (7.18)$$

Se tiene que

$$L(z) : \{a - \pi c^{-1} < \operatorname{Re} z \leq a + \pi c^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-ki, +ki\}$$

es una transformación biyectiva y conforme. Una proyección de Lagrange-Lambert es biyectiva en el intervalo (en longitud terrestre)

$$[-\pi, \pi) \cap [a - \pi c^{-1}, a + \pi c^{-1}].$$

La figura 6.4 ilustra los cuatro casos donde este intervalo es no vacío. La pre-schwarziana de $L(z)$ es (6.14):

$$P(L) = c \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - \alpha) \right] = \frac{c}{k} L(z).$$

Esta identidad y el Teorema 7.1 demuestran el siguiente resultado.

Teorema 7.3. *Sea p una proyección de Lagrange-Lambert de exponente c y centro $\alpha = a + ib$. Un punto x_0 , perteneciente al dominio de p , es un punto geodésico de p si y solo si*

$$L(z_0) = i k c^{-1} \operatorname{sen} \varphi_0. \quad (7.19)$$

Según este teorema, *los puntos geodésicos de las proyecciones de Lagrange-Lambert están situados en el eje de la proyección* (la recta que une las imágenes de los polos terrestres). Las ecuaciones (6.19) proporcionan las partes real e imaginaria de $L(z_0)$, luego (7.19) equivale a

$$\frac{\operatorname{sen} [c(\lambda_0 - a)]}{\cos [c(\lambda_0 - a)] + \cosh [c(q_0 - b)]} = 0$$

y

$$\frac{\operatorname{senh} [c(q_0 - b)]}{\cos [c(\lambda_0 - a)] + \cosh [c(q_0 - b)]} = c^{-1} \operatorname{sen} \varphi_0. \quad (7.20)$$

La primera condición se cumple si y solo si $\lambda_0 = a$ (meridiano principal cuando $|a| \leq \pi$), $\lambda_0 = a - \pi c^{-1}$ o $\lambda_0 = a + \pi c^{-1}$. Sus imágenes están contenidas en el eje Y , según muestra la figura 6.8.

En los casos $\lambda_0 = a \pm \pi c^{-1}$, la ecuación (7.20) se convierte en

$$\operatorname{cotgh} \left[\frac{c}{2} (q_0 - b) \right] = c^{-1} \operatorname{sen} \varphi_0.$$

Una condición necesaria para que tenga solución es que $c < |\operatorname{sen} \varphi_0|$, porque $|\operatorname{tgh} x| < 1$ para todo x real. Se deduce que *no existen puntos geodésicos si $c \geq 1$* . Esta restricción fuerte en el valor del exponente de la proyección nos inclina a estudiar el caso $\lambda_0 = a$, pero la principal razón es que $\lambda_0 = a$ es el único que se transforma íntegramente en un segmento rectilíneo.

Puntos geodésicos en el meridiano principal

El problema planteado es determinar $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ en la ecuación (7.20) con $\lambda_0 = a$, $|a| \leq \pi$:

$$\frac{\sinh [c(q_0 - b)]}{1 + \cosh [c(q_0 - b)]} = c^{-1} \sin \varphi_0. \quad (7.21)$$

Esta ecuación es otra contribución de Bonnet [1852, § 37, ecuación (14)] a la teoría de las proyecciones de Lagrange —véase también (6.13) y (6.28)—. Excluimos los polos terrestres porque la proyección no es conforme en estos puntos, excepto si $c = 1$ —véase el Corolario 6.1—.

Primero observamos que una condición necesaria para que (a, φ_0) sea un punto geodésico es que $|\operatorname{Im} L(z_0)| < k$, es decir,

$$|\sin \varphi_0| < c. \quad (7.22)$$

Por ejemplo, en la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1/2$ necesariamente $|\varphi_0| < 30^\circ$. Por otra parte, la ecuación (7.21) equivale a

$$\operatorname{tgh} \left[\frac{c}{2} (q_0 - b) \right] = c^{-1} \sin \varphi_0.$$

En lo que sigue suponemos que $k = 1$. Consideremos las coordenadas distancia (μ, ν) en el plano $w = L(z)$, introducidas en la Sección 6.3:

$$\mu = |i - L(z)|, \quad \nu = |i + L(z)|.$$

La identidad (6.26) equivale a

$$q = b - c^{-1} \log (\mu/\nu). \quad (7.23)$$

La ecuación de la imagen de $\lambda = a$, en estas coordenadas, es

$$\mu + \nu = 2, \quad (7.24)$$

como ilustra la figura 7.7. Por tanto la condición (7.19), en $\lambda_0 = a$, adopta la forma

$$\mu_0 = 1 - c^{-1} \sin \varphi_0, \quad (7.25)$$

donde $\mu_0 = \mu(a, \varphi_0)$, o bien $\nu_0 = 1 + c^{-1} \sin \varphi_0$.

Elegimos $t = \sin \varphi \in (-1, 1)$ como incógnita del problema con la condición (7.22): $|t| < c$. En un punto geodésico (a, φ) , la ecuación (7.23) se convierte en

$$q = b - c^{-1} \log \frac{1 - c^{-1}t}{1 + c^{-1}t} \quad \text{o} \quad \boxed{q = b + 2c^{-1} \operatorname{arc tgh} (c^{-1}t)}, \quad (7.26)$$

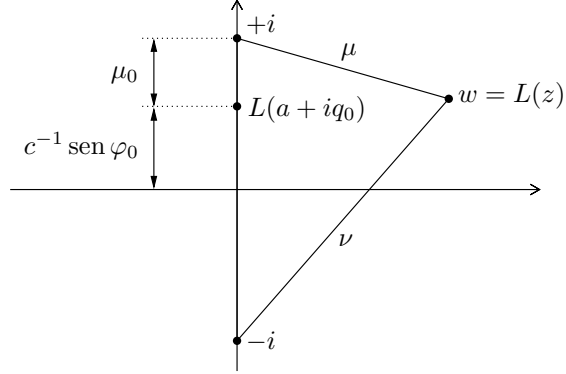


Fig. 7.7. Coordenadas distancia (μ, ν) . En una proyección de Lagrange-Lambert, (a, φ_0) es un punto geodésico si y solo si $\mu_0 = 1 - c^{-1} \sin \varphi_0$.

en virtud de la identidad

$$\operatorname{arc} \operatorname{tgh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Por otra parte, la latitud isométrica satisface la identidad

$$q = \operatorname{arc} \operatorname{tgh} \sin \varphi - e \operatorname{arc} \operatorname{tgh} (e \sin \varphi), \quad (7.27)$$

que se deduce de (1.7), donde e es la primera excentricidad del elipsoide. Si llamamos $\omega(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tgh} x$, entonces (7.26) se convierte en

$$\omega(t) - 2c^{-1}\omega(c^{-1}t) - e\omega(et) = b, \quad (7.28)$$

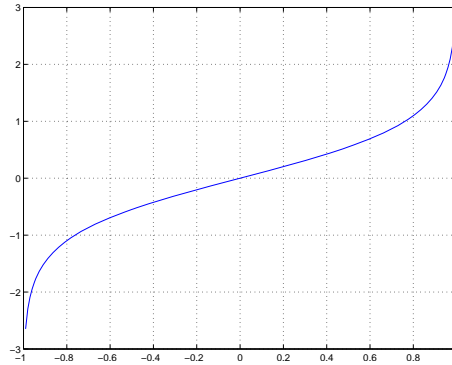
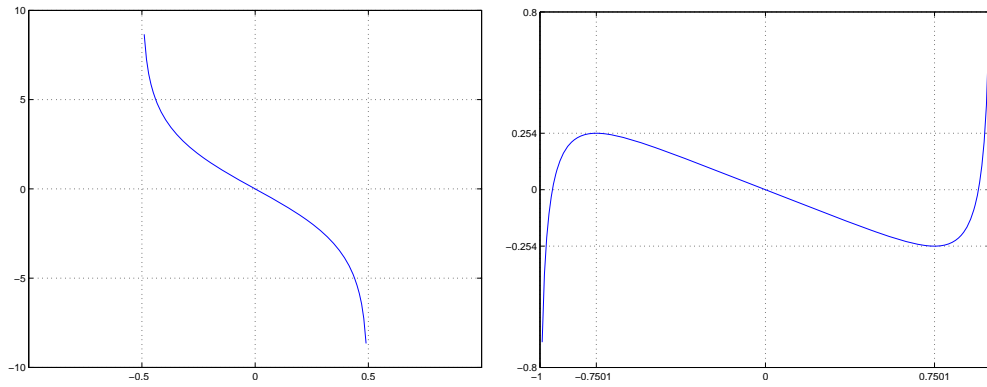
a la que llamamos *ecuación de punto geodésico*. Vamos a estudiarla.

Analicemos su primer miembro, la función

$$F(t) = \omega(t) - 2c^{-1}\omega(c^{-1}t) - e\omega(et). \quad (7.29)$$

La función $\omega(t)$ está definida en el intervalo $|t| < 1$ con asíntotas verticales en los extremos —figura 7.8—, luego $\omega(c^{-1}t)$ está definida en $|t| < c$ y $\omega(et)$ en $|t| < e^{-1}$, donde $e < 1$. Se concluye que el dominio de definición de F es

$$D(F) = \begin{cases} (-c, c), & \text{si } c < 1 \\ (-1, 1), & \text{si } c \geq 1. \end{cases}$$

Fig. 7.8. Gráfica de $\omega(t) = \operatorname{arctgh} t$.Fig. 7.9. Gráfica de $F(t) = \omega(t) - 2c^{-1}\omega(c^{-1}t) - e\omega(et)$, con $c = 0.5$ (izquierda) y $c = 1.2$ (derecha).

Además, F es continua e impar pues ω lo es. En la figura 7.9 está dibujada su gráfica según los valores $c = 0.5$ y $c = 1.2$.

Para hallar la derivada de F observamos que en (7.29) aparece la latitud isométrica (7.27): $q(t) = \omega(t) - e\omega(et)$. Por otra parte sabemos que

$$q'(t) = \frac{dq}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\rho}{r} \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{r^2 K}. \quad (7.30)$$

Si hacemos $e = 0$ en las dos ecuaciones anteriores, obtenemos $\omega'(t) = q'(t) = \sec^2 \varphi = 1/(1-t^2)$. Por tanto la derivada del término restante en F se calcula así:

$$\frac{d}{dt} \omega(c^{-1}t) = c^{-1} \omega'(c^{-1}t) = \frac{c}{c^2 - t^2}.$$

Finalmente $F'(t) = 1/(r^2 K) - 2/(c^2 - t^2)$, que expresamos así:

$$F'(t) = \frac{c^2 - c_L^2}{r^2 K (c^2 - t^2)}, \quad (7.31)$$

donde $c_L^2 = c_L^2(\varphi) = t^2 + 2r^2 K$. La notación c_L se justifica en la siguiente sección, véase (7.48).

Observación. El resultado obtenido en (7.30), $r^2 K = \rho^{-1} r \cos \varphi$, también se deduce de la ecuación (7.2): $r^2 K = -\Delta \log r$. Por otra parte, al sustituir las fórmulas de r y ρ expresadas en (1.2) y (1.3), obtenemos

$$r^2 K = \cos^2 \varphi (1 + e'^2 \cos^2 \varphi), \quad (7.32)$$

donde $e'^2 = e^2/(1 - e^2)$ es el cuadrado de la segunda excentricidad del elipsoide.

La derivada de F se anula si y solo si $c^2 = c_L^2$. Al tener en cuenta (7.32), observamos que

$$c_L^2 = 1 + \cos^2 \varphi + 2e'^2 \cos^4 \varphi,$$

valor que está acotado: $1 < c_L^2 \leq 2(1 + e'^2)$ para todo $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Como $|t| < c$, el signo de F' coincide con el de la diferencia $c^2 - c_L^2$. Entonces F es estrictamente decreciente si $c \leq 1$ —figura 7.9— y es estrictamente creciente si $c > \sqrt{2(1 + e'^2)}$. En ambos casos se concluye que la ecuación $F(t) = b$ tiene una única solución para todo b real. Lo mismo cuando $c = \sqrt{2(1 + e'^2)}$, pues en este caso F' se anula en $t = 0$ y es positiva si $t \neq 0$.

Por tanto *las proyecciones de Lagrange-Lambert de exponente $c \leq 1$ o $c \geq \sqrt{2(1 + e'^2)}$ tienen un único punto geodésico (a, φ) , donde $t = \sin \varphi$ es solución de la ecuación (7.28)*. En particular, si $b = 0$ entonces la solución es $\varphi = 0$. Recíprocamente, $\varphi = 0$ implica $b = 0$ en virtud de (7.26).

Proyección estereográfica. En cualquier esfera, la estereográfica con centro en un punto arbitrario (λ_0, q_0) coincide con la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1$ y centro $a + ib = \lambda_0 - iq_0$, según demostramos en la Sección 6.2. En este caso, la ecuación (7.28) se convierte en $\omega(t) = -b$, es decir, $\operatorname{arctgh} t = q_0$, cuya única solución es $t = \operatorname{tgh} q_0 = \sin \varphi_0$. Se concluye que el centro de la proyección estereográfica es su único punto geodésico, resultado que concuerda con el obtenido en la Sección 7.1. ■

Cuando $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$ entonces la ecuación $c^2 = c_L^2$ tiene solución. Como $\cos^2 \varphi = 1 - t^2$, dicha ecuación equivale a

$$2e'^2 (1 - t^2)^2 + (1 - t^2) + (1 - c^2) = 0. \quad (7.33)$$

Al resolverla y excluir los valores que no pertenecen al dominio de definición, $|t| < 1$, obtenemos $t = \pm t_{min}$, donde

$$t_{min} = \left[1 - \frac{-1 + \sqrt{1 + 8e'^2(c^2 - 1)}}{4e'^2} \right]^{1/2}.$$

Como F' se anula en $t = \pm t_{min}$ y además:

$$F'(0) = \frac{c^2 - 2(1 + e'^2)}{c^2(1 + e'^2)} < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) = +\infty,$$

se concluye que F tiene un mínimo relativo (negativo) en $t = t_{min}$ y un máximo relativo (positivo) en $t = -t_{min}$. En la figura 7.9, $c = 1.2$, se aprecia que el número de soluciones de la ecuación $F(t) = b$ depende de b en el siguiente sentido: una si $|b| > M$, dos si $b = \pm M$ o tres si $|b| < M$, donde $M = M(c)$ es el valor, positivo, de F en el máximo relativo:

$$M(c) = F(-t_{min}) = 2c^{-1} \operatorname{arc} \operatorname{tgh}(c^{-1}t_{min}) - \operatorname{arc} \operatorname{tgh} t_{min} + e \operatorname{arc} \operatorname{tgh}(et_{min}).$$

Obsérvese que si $b = M$, uno de los puntos geodésicos es $\varphi = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} t_{min}$; y si $b = -M$, uno de los puntos geodésicos es $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{sen} t_{min}$.

En el ejemplo $c = 1.2$ —figura 7.9—, se tiene que $t_{min} = 0.7501$ y $M = 0.2540$. A continuación sintetizamos el estudio que hemos realizado.

Teorema 7.4. *Sea N el número de puntos geodésicos, en el meridiano principal, de una proyección de Lagrange-Lambert de exponente c y centro $a + ib$ en coordenadas (λ, q) del elipsoide de revolución.*

- Si $c \leq 1$ o $c \geq \sqrt{2(1 + e'^2)}$ entonces $N = 1$.
- Si $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$ entonces

$$N = \begin{cases} 1, & \text{si } |b| > M(c) \\ 2, & \text{si } |b| = M(c) \\ 3, & \text{si } |b| < M(c), \end{cases} \quad (7.34)$$

donde

$$M(c) = 2c^{-1} \operatorname{arc} \operatorname{tgh}(c^{-1}t_{min}) - \operatorname{arc} \operatorname{tgh} t_{min} + e \operatorname{arc} \operatorname{tgh}(et_{min})$$

(7.35)

y

$$t_{min} = \left[1 - \frac{-1 + \sqrt{1 + 8e'^2(c^2 - 1)}}{4e'^2} \right]^{1/2}. \quad (7.36)$$

Las coordenadas geográficas de los puntos geodésicos son (a, φ) con φ solución de la ecuación

$$\operatorname{arc\,tgh} \operatorname{sen} \varphi - 2c^{-1} \operatorname{arc\,tgh} (c^{-1} \operatorname{sen} \varphi) - e \operatorname{arc\,tgh} (e \operatorname{sen} \varphi) = b.$$

Esfera. En esta superficie, el número de puntos geodésicos es uno si $c \leq 1$ o $c \geq \sqrt{2}$. Cuando $1 < c < \sqrt{2}$, dicho número depende de b según (7.34), pero ahora

$$M(c) = 2c^{-1} \operatorname{arc\,tgh}(c^{-1}\sqrt{2-c^2}) - \operatorname{arc\,tgh} \sqrt{2-c^2}. \quad (7.37)$$

En efecto, $F(t) = \omega(t) - 2c^{-1}\omega(c^{-1}t)$ y F' se anula si y solo si t satisface la ecuación (7.33) que, en cualquier esfera, equivale a $t^2 = 2 - c^2$. Entonces

$$t_{min} = \sqrt{2 - c^2}.$$

Por definición, $M(c) = F(-t_{min})$. ■

Ejemplo. En una nota de Nikolai Yakovlevich Tsinger [Zinger, 1906] dedicada a las proyecciones de Lagrange-Lambert (en relación con el artículo de Chebyshev [1856a] sobre optimización de proyecciones conformes) se puede leer [p. 212]:

Voilà pourquoi, quand il fût question à la Société de Géographie impériale russe de reconstruire la carte de la Russie d'Europe à l'échelle de 1 : 1 640 000 (sous la rédaction de M. J. de Schokalsky), on adopta la projection de Lagrange avec la valeur de $C = 1,04$.

Consideremos, en la esfera, la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1.04$, centro $a + ib$ y $k = 1$. En el meridiano principal, $\lambda = a$, el número de puntos geodésicos de esta proyección es, en virtud de (7.34) y (7.37):

$$\begin{cases} 1, & \text{si } |b| > 1.1494 \\ 2, & \text{si } |b| = 1.1494 \\ 3, & \text{si } |b| < 1.1494. \end{cases}$$

La figura 7.10 muestra la gráfica de F junto con los valores $t_{min} = 0.9583$ y $M(c) = 1.1494$. Si $b = -0.5$, por ejemplo, entonces la proyección tiene tres

puntos geodésicos. Sus latitudes son cada una de las soluciones de la ecuación no lineal

$$\operatorname{arc\,tgh} \operatorname{sen} \varphi - 2 (1.04^{-1}) \operatorname{arc\,tgh} (1.04^{-1} \operatorname{sen} \varphi) = -0.5.$$

La función `fzero` del software MATLAB permite resolverla y se obtiene:

$$\varphi_1 = -88.4^\circ, \quad \varphi_2 = 32.6^\circ \quad \text{y} \quad \varphi_3 = 85.3^\circ,$$

valores correspondientes a $t_1 = -0.9996$, $t_2 = 0.5381$ y $t_3 = 0.9967$, la abscisa de los tres puntos de corte de $F(t) = -0.5$, como ilustra la figura 7.10. La función $g = \log \sigma$ a lo largo del meridiano principal es, según (7.18):

$$g(a, q) = \log 1.04 + \log \cosh q - \log \{1 + \cosh [1.04 (q + 0.5)]\},$$

cuya gráfica se muestra en la figura 7.11, y tiene, en efecto, tres puntos críticos: $q_1 = -4.27$, $q_2 = 0.60$ y $q_3 = 3.20$. Estos valores son las respectivas latitudes isométricas de los tres puntos hallados anteriormente. ■

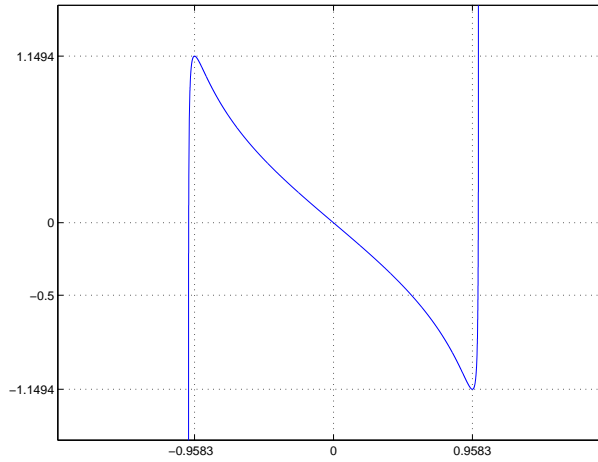


Fig. 7.10. Gráfica de $F(t) = \omega(t) - 2c^{-1}\omega(c^{-1}t)$, con $t = \operatorname{sen} \varphi$ y $c = 1.04$ en el intervalo $|t| < 1$. La ecuación $F(t) = -0.5$ tiene tres soluciones.

Nota histórica. En su segunda memoria, Lagrange [1779, § 38] considera la variable $n = \mu/\nu$ como incógnita del problema. En el meridiano principal se cumple (7.24): $\mu + \nu = 2$, luego $\mu = 2n/(1 + n)$. Por otra parte, la identidad (7.23) equivale a

$$e^q = e^b n^{-1/c}. \quad (7.38)$$

Por tanto la ecuación de punto geodésico (7.25) en la esfera: $\mu = 1 - c^{-1} \operatorname{tgh} q$, se convierte en

$$n^{1/c} e^{-b} [c(1 - n) + (1 + n)] + n^{-1/c} e^b [c(1 - n) - (1 + n)] = 0, \quad (7.39)$$

equivalente a la que obtiene Lagrange [1779, § 38, penúltima ecuación]. La relación entre n y nuestra variable $t = \operatorname{sen} \varphi$ es $t = c(1 - n)/(1 + n)$.

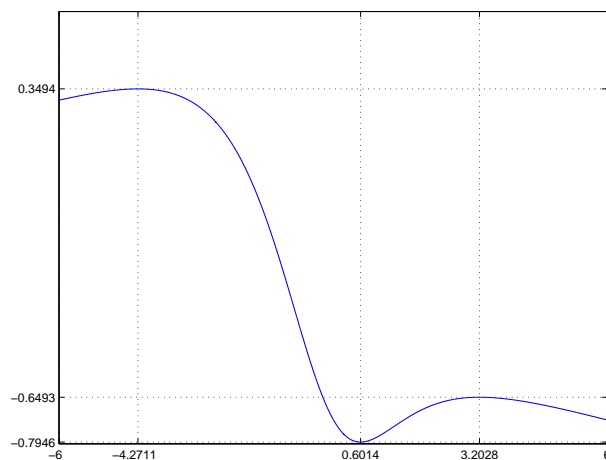


Fig. 7.11. Gráfica de $g(a, q)$ de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1.04$ y centro $a = 0.5i$, en el intervalo $|q| \leq 6$ o $|\varphi| \leq 89.7^\circ$.

7.3. Optimización local de Lagrange

Sea $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ un punto del elipsoide de revolución. En una parte de su segunda memoria, Lagrange [1779, §§ 35-42] plantea el problema de elegir la proyección *más conveniente* para representar regiones próximas a x_0 . Aquí la familia de proyecciones es la de Lagrange-Lambert, que está determinada por tres constantes fundamentales significativas (a, b, c) . El sentido de *más conveniente* ha sido explicado en la Sección 7.1.

Consideremos ahora la alteración causada por la proyección en el tamaño de los distintos lugares de la superficie de la Tierra, y veamos los modos de disminuirla. [§ 35]

Describimos brevemente, en tres etapas, el procedimiento de optimización local seguido por Lagrange.

1.º Observa que si $a = \lambda_0$ (el meridiano principal coincide con el del punto de partida) entonces:

Se deduce que los lugares situados en este meridiano son aquellos cuyo tamaño está menos alterado en longitud por la proyección. [§ 35]

En efecto, un análisis (omitimos los detalles) de la función —véase (7.18)—

$$g(\lambda, q) = \log \sigma = \log(kc) - \log r(q) - \log \{ \cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)] \},$$

a lo largo de cualquier paralelo de latitud q , establece que g alcanza el *mínimo absoluto* en $\lambda = a$ para todo q . La figura 7.12 ilustra este resultado. ■

2.º A continuación de la cita que hemos expuesto en el primer paso, Lagrange dice (la cursiva es nuestra):

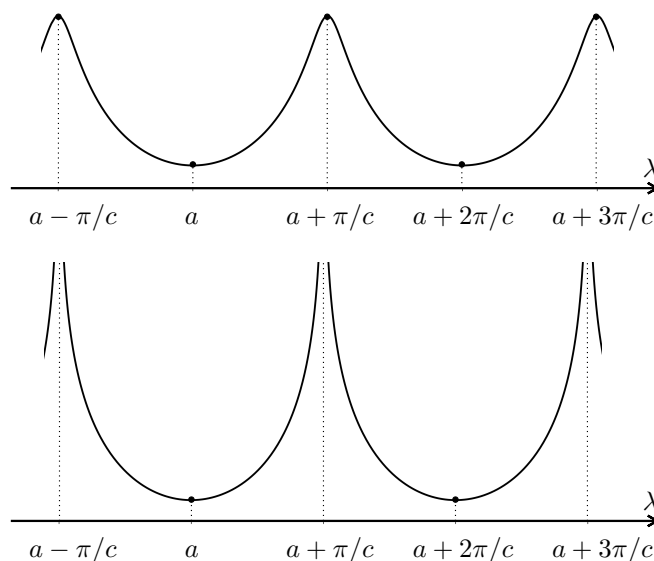


Fig. 7.12. Arriba: gráfica de $g(\lambda, q) = \log \sigma$ a lo largo de cualquier paralelo de latitud $q \neq b$. Debajo: gráfica de $g(\lambda, b)$.

Por tanto queda buscar la latitud del lugar que *al mismo tiempo* está sujeto a la menor alteración en latitud. [§ 35]

Es decir, exige que x_0 sea un punto geodésico (punto crítico de la función $g = \log \sigma$). Con este fin, y restringido a la esfera unidad, expresa la escala infinitesimal en función de las coordenadas distancia (μ, ν) «en un punto cualquiera del Mapa» [Lagrange, 1779, § 36, última ecuación]:

$$\sigma(\mu, \nu) = \frac{c}{4k} (\mu^{1+1/c} \nu^{1-1/c} e^{-b} + \mu^{1-1/c} \nu^{1+1/c} e^b). \quad (7.40)$$

Esta fórmula proviene de la identidad $mr\sigma = 1$, donde

$$m = \frac{2k}{c} \frac{1}{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} = \cosh q = \frac{1}{2} (e^{-b} n^{1/c} + e^b n^{-1/c}),$$

en virtud de (6.28) y (7.38) respectivamente, con $n = \mu/\nu$. ■

3.º Por último Lagrange reduce a una el número de variables independientes, designada con la letra β . En efecto, en el meridiano principal se tiene $\mu + \nu = 2k$ —véase la Sección 6.3—, luego se puede sustituir (μ, ν) por $(\mu + \beta, \nu - \beta)$ en (7.40):

$$\sigma(\beta) = \frac{c}{4k} \left[(\mu + \beta)^{1+1/c} (\nu - \beta)^{1-1/c} e^{-b} + (\mu + \beta)^{1-1/c} (\nu - \beta)^{1+1/c} e^b \right], \quad (7.41)$$

donde (μ, ν) es un punto de referencia en el meridiano principal, que va a ser el propio punto de partida x_0 , cuya localización no conocemos porque la proyección no está aún definida. (Obsérvese que las soluciones de $\mu + \nu = 2k$ son $(\mu + \beta, \nu - \beta)$ con (μ, ν) una solución particular.)

Las relaciones $n = \mu/\nu$ y $\mu + \nu = 2k$ proporcionan:

$$\mu = 2k \frac{n}{1+n} \quad \text{y} \quad \nu = 2k \frac{1}{1+n}.$$

Además,

$$e^b = e^{q_0} n^{1/c} \quad \text{con} \quad e^{q_0} = \operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi_0/2),$$

en virtud de (7.23). Entonces (7.41) es $\sigma(\beta) = \sigma(\beta; c, n)$ donde c y n son incógnitas que se determinan con las condiciones:

$$\frac{d\sigma}{d\beta}(0; c, n) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\sigma}{d\beta^2}(0; c, n) = 0.$$

Estas conducen a las dos últimas ecuaciones de [Lagrange, 1779, § 38] respectivamente; la primera de ellas es (7.39). Al resolverlas se obtiene (omitimos los detalles):

$$c = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0} \quad \text{y} \quad n = \frac{c - \operatorname{sen} \varphi_0}{c + \operatorname{sen} \varphi_0}, \quad (7.42)$$

fórmulas que se encuentran al final de [Lagrange, 1779, § 39]. ■

Bonnet [1852, §§ 37-40] también resuelve el problema de optimización local de Lagrange; obtiene las fórmulas (7.42) por un camino próximo a la teoría de puntos geodésicos que hemos construido en la Sección 7.1:

Buscamos el punto en el cual la escala infinitesimal, designada arriba por n , es mínima, o bien el punto en cuya vecindad n está lo menos alterada. [§ 37]

Apliquemos nuestra teoría de puntos geodésicos para resolver el problema de optimización local de Lagrange. Sea $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$, $|\varphi_0| < \pi/2$, un punto geodésico de la proyección de Lagrange-Lambert que buscamos. Entonces $\lambda_0 \in \{a, a + \pi c^{-1}, a + \pi c\}$ según demostramos en la Sección 7.2. Elegimos

$$a = \lambda_0,$$

es decir, x_0 pertenece al meridiano principal (el único que se transforma íntegramente en un segmento rectilíneo). Además, en un punto geodésico se cumple (7.26):

$$b = q_0 - 2c^{-1} \operatorname{arctg}(c^{-1}t_0), \quad (7.43)$$

donde $t_0 = \sin \varphi_0$. Esta ecuación permite calcular b una vez determinado el exponente de la proyección, c , que pasa a ser la incógnita principal del problema y está sujeta a la restricción (7.22):

$$c > |t_0|. \quad (7.44)$$

Para obtener c recurrimos a la hessiana (7.11) de $g = \log \sigma$ en x_0 :

$$Hg(x_0) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} S_0 - \frac{1}{2}t_0^2 & -\operatorname{Im} S_0 \\ -\operatorname{Im} S_0 & r_0^2 K_0 - \left(\operatorname{Re} S_0 - \frac{1}{2}t_0^2\right) \end{bmatrix},$$

donde K_0 es la curvatura de Gauss del elipsoide de revolución en x_0 . En las proyecciones de Lagrange-Lambert, la schwarziana es $S(f)(z) = c^2/2$ para todo $z = \lambda + iq$, luego la matriz anterior se convierte en

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(c^2 - t_0^2) & 0 \\ 0 & r_0^2 K_0 - \frac{1}{2}(c^2 - t_0^2) \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

La aproximación cuadrática de g en x_0 —ecuación (7.8)— depende de esta matriz. Si la matriz fuera nula, el comportamiento de g en un entorno de x_0 sería semejante al del caso ideal: g idénticamente constante. El primer elemento de la diagonal de H es positivo debido a (7.44). El segundo, que es igual a $\partial^2 g / \partial q^2$, se anula si y solo si

$$c^2 = 2r_0^2 K_0 + t_0^2, \quad (7.46)$$

en cuyo caso el primer elemento de la diagonal se expresa como $r_0^2 K_0$. La ecuación anterior equivale a

$$c^2 = 1 + \cos^2 \varphi_0 + 2e'^2 \cos^4 \varphi_0 \quad (7.47)$$

en virtud de (7.32). Llamamos *proyección óptima de Lagrange asociada con x_0* a la proyección de Lagrange-Lambert (excepto la constante k) de exponente c determinado por (7.46) y centro $a + ib$ con $a = \lambda_0$ y b fijado por (7.43).

Si $\varphi_0 = 0$ entonces $c^2 = 2(1 + e'^2)$ y $b = 0$. El Teorema 7.4 establece que x_0 es el único punto geodésico de la proyección óptima de Lagrange. Véase la figura 7.13.

Si $\varphi_0 \neq 0$, la proyección óptima de Lagrange tiene dos puntos geodésicos en virtud del Teorema 7.4. En efecto, primero observamos que $1 < c^2 < 2(1 +$

e'^2). Después sustituimos (7.47) en la fórmula (7.36) y obtenemos $t_{min} = |t_0|$. Entonces

$$M(c) = 2c^{-1} \operatorname{arc\,tgh}(c^{-1}|t_0|) - \operatorname{arc\,tgh}|t_0| + e \operatorname{arc\,tgh}(e|t_0|).$$

Por último, distinguimos $\varphi_0 < 0$ y $\varphi_0 > 0$, y comprobamos en ambos casos que $|b| = M(c)$.

Cuando $\varphi_0 \neq 0$ uno de los dos puntos geodésicos es x_0 . Este es un punto crítico *degenerado* de g porque $\det H = 0$ [Marsden y Tromba, 1991, § 4.2, p. 256]. En la Sección 7.4 (punto parabólico) demostramos que x_0 es un punto silla de g . El otro punto geodésico es también un punto silla de g . Esto se aprecia en la figura 7.13, donde hay que tener en cuenta el comportamiento de g a lo largo de los paralelos —figura 7.12—. El análisis realizado demuestra el siguiente resultado.

Teorema 7.5. *Sea $x = (\lambda, \varphi)$, con $|\varphi| < \pi/2$, un punto del elipsoide de revolución. Sean*

$$c_L(\varphi) = \sqrt{2r^2K + \sin^2 \varphi} \quad (7.48)$$

y

$$b_L(\varphi) = q - 2c_L^{-1} \operatorname{arc\,tgh}(c_L^{-1} \sin \varphi). \quad (7.49)$$

Excepto la constante k , la proyección de Lagrange-Lambert de exponente c_L y centro $a + ib = \lambda + ib_L$, que llamamos proyección óptima de Lagrange asociada con x , tiene dos puntos geodésicos si $\varphi \neq 0$: uno de ellos es x , que es un punto crítico degenerado de $g = \log \sigma$; el otro es un punto silla de g . Si $\varphi = 0$ entonces $c_L = \sqrt{2(1 + e'^2)}$, $b_L = 0$ y x es el único punto geodésico. Además, la hessiana de g en x es

$$H = \begin{bmatrix} r^2K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El exponente (7.48) de la proyección óptima de Lagrange ya apareció en la sección anterior —véase (7.31)— y también se expresa así:

$$c_L(\varphi) = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi + 2e'^2 \cos^4 \varphi}, \quad (7.50)$$

fórmula que se encuentra en [Lehmann, 1939, p. 335] y en [König y Weise, 1951, p. 379, ecuación (156)]. La figura 7.14 muestra las gráficas de c_L y

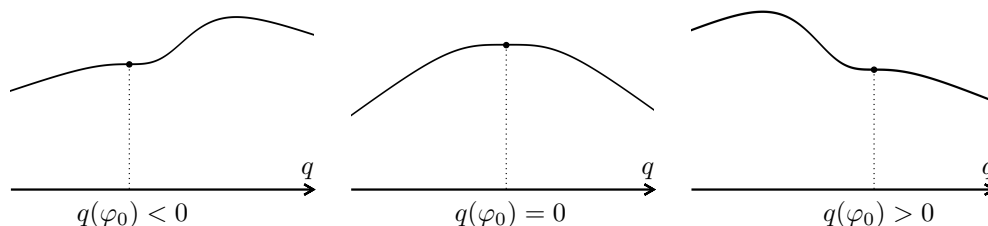


Fig. 7.13. Gráfica de $g(\lambda, q) = \log \sigma$ a lo largo del meridiano principal $\lambda = a$ de la proyección óptima de Lagrange asociada con $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$. Si $\varphi_0 = 0$ entonces x_0 es el único punto geodésico. Si $\varphi_0 \neq 0$ la proyección tiene dos puntos geodésicos, uno de los cuales es x_0 .

b_L en función de φ , la latitud del punto de partida, en el elipsoide GRS80 ($e' = 0.082094438$).

Esfera. Dado $x = (\lambda, \varphi)$, con $|\varphi| < \pi/2$, un punto de cualquier esfera, la proyección óptima de Lagrange está determinada por

$$c_L = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}, \quad b_L = \arctan \sinh \varphi - 2c_L^{-1} \arctan(c_L^{-1} \sinh \varphi) \quad (7.51)$$

y $a = \lambda$. El valor de c_L es el que obtiene Lagrange —véase (7.42)—. En este caso, se tiene que $\sinh \varphi = \pm \sqrt{2 - c_L^2}$, donde el signo positivo se corresponde con $\varphi > 0$ y el negativo con $\varphi < 0$. Si $\varphi = 0$ entonces $c_L = \sqrt{2}$, $b_L = 0$ y x es el único punto geodésico. Si $\varphi \neq 0$ la proyección tiene dos puntos geodésicos, uno de los cuales es x . La hessiana de $g = \log \sigma$ en x es

$$H = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.52)$$

que coincide con la hessiana (7.15) de la transversa de Mercator. ■

Ejemplo

Para finalizar esta sección ofrecemos el ejemplo que cierra las dos memorias de Lagrange [1779, § 42]:

Supongamos que se tratase de construir un Mapa cuyo centro deba estar ocupado por la ciudad de Berlín.

Sea $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ con

$$\lambda_0 = 31^\circ 2' 30'' \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 52^\circ 31' 30''.$$

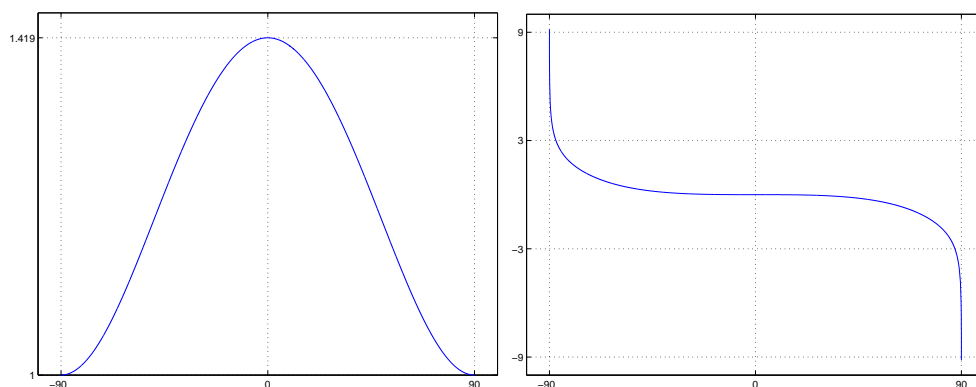


Fig. 7.14. Gráficas de $c_L(\varphi)$ —izquierda— y $b_L(\varphi)$ —derecha— en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Estas son las coordenadas geográficas de Berlín, en la esfera unidad, que proporciona Lagrange —escribe las dos memorias para la Academia de dicha ciudad—. En aquella época el meridiano de referencia está situado en las islas Canarias [Sobel, 1997, p. 49].

Calculamos $q_0 = \log \operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi_0/2) = 1.0811$. Excepto la constante k , la proyección óptima de Lagrange está determinada por

$$a = 0.5418, \quad b_L = -0.3291 \quad \text{y} \quad c_L = 1.1705,$$

según las fórmulas (7.51). El centro de la proyección, $a + ib_L$, se corresponde con el punto $(\lambda = \lambda_0, \varphi = -18^\circ 31')$. La función $g = \log \sigma$ de esta proyección, con $k = 1$, es

$$g = \log c_L + \log \cosh q - \log \{ \cos [c_L (\lambda - a)] + \cosh [c_L (q - b_L)] \},$$

en virtud de (7.18). Su gráfica se muestra en las figuras 7.15, 7.16 y 7.17. La proyección tiene dos puntos geodésicos: uno es x_0 , punto crítico degenerado de g ; el otro es un punto silla de g . Además, la hessiana de g en x_0 es (7.52):

$$H = \begin{bmatrix} 0.3702 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

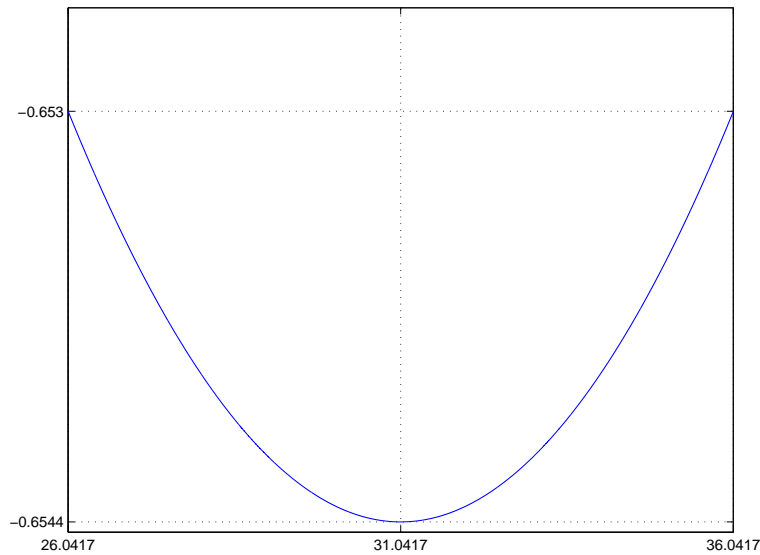


Fig. 7.15. Gráfica de $g(\lambda, q_0)$ en el intervalo $|\lambda - \lambda_0| \leq 5^\circ$. Se cumple que $\lambda = \lambda_0$ es un mínimo de g a lo largo del paralelo de latitud φ_0 . Confróntese con la figura 7.12.

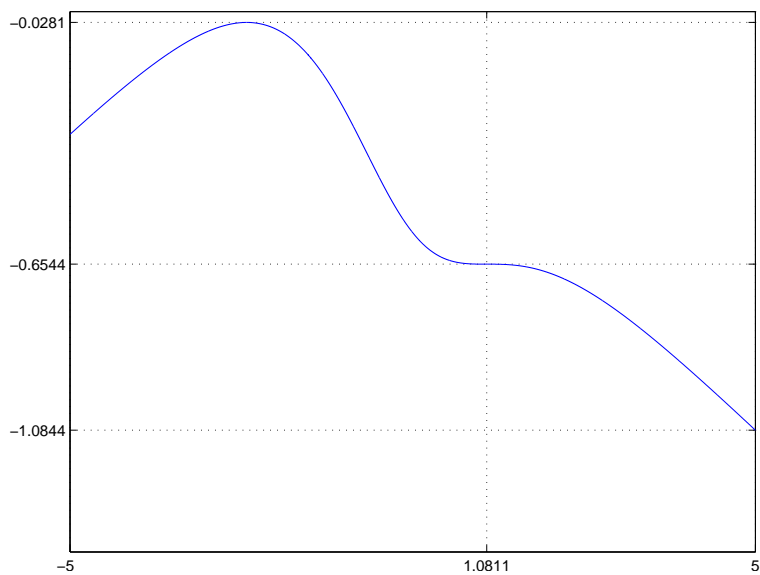


Fig. 7.16. Gráfica de $g(\lambda_0, q)$ en el intervalo $|q| \leq 5$, es decir, $|\varphi| \leq 89.2^\circ$. Obsérvese que $q = q_0$ es un punto de inflexión de g a lo largo del meridiano principal λ_0 . Confróntese con la figura 7.13

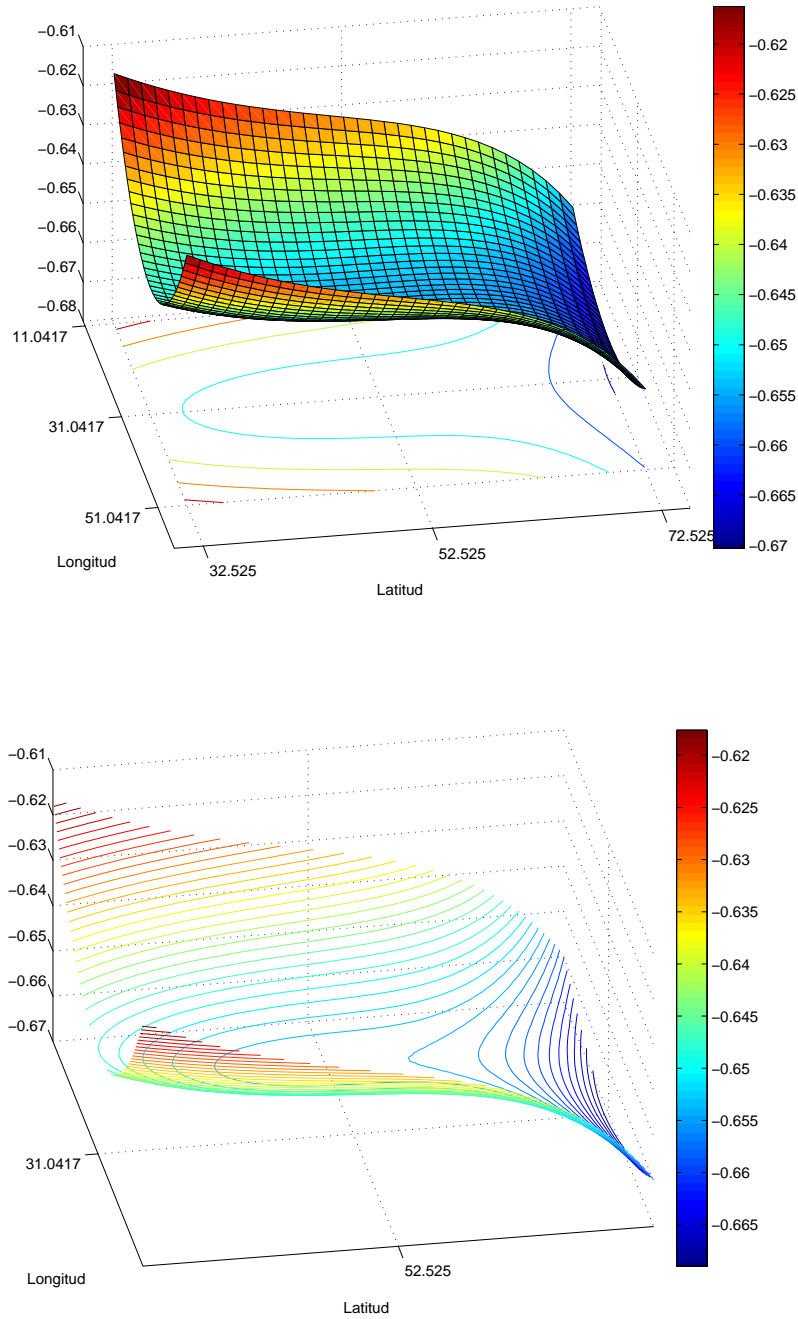


Fig. 7.17. Gráfica de $g(\lambda, q)$, donde se muestra sus curvas de nivel, en la región $\{(\lambda, \varphi) : |\lambda - \lambda_0| \leq 20^\circ, |\varphi - \varphi_0| \leq 20^\circ\}$. Obsérvese que (λ_0, φ_0) es un punto silla de g .

7.4. Clasificación de los puntos geodésicos

Clasifiquemos los puntos geodésicos de las proyecciones de Lagrange-Lambert. Según la teoría construida en la Sección 7.1, un punto geodésico x_0 es elíptico, parabólico o hiperbólico en virtud del signo de los autovalores, μ_1 y μ_2 , de la hessiana de $g = \log \sigma$ en x_0 . La aproximación cuadrática de g es (7.17):

$$Q(x) = g_0 + \frac{1}{2} (\mu_1 X^2 + \mu_2 Y^2), \quad (7.53)$$

donde $g_0 = g(x_0)$ y (X, Y) son las coordenadas de $x = (\lambda, q)$ en el sistema de referencia asociado con los autovectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 con origen en x_0 . Los cuatro ejemplos de dicha sección: proyección de Mercator, cónica conforme de Lambert, estereográfica y transversa de Mercator, no cubren todos los tipos de puntos geodésicos; las proyecciones de Lagrange-Lambert sí lo hacen.

En cualquier proyección de Lagrange-Lambert de exponente c y centro $a + ib$, la hessiana de g en un punto geodésico (a, φ_0) es (7.45):

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c^2 - t_0^2 & 0 \\ 0 & c_L^2 - c^2 \end{bmatrix},$$

donde $t_0 = \sin \varphi_0$ y c_L es (7.48):

$$c_L(\varphi_0) = \sqrt{2 r_0^2 K_0 + t_0^2}. \quad (7.54)$$

Los autovalores de H son

$$\boxed{\mu_1 = g_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} (c^2 - t_0^2)} \quad \text{y} \quad \boxed{\mu_2 = g_{qq} = \frac{1}{2} (c_L^2 - c^2)}. \quad (7.55)$$

Dado $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ del elipsoide de revolución *existen infinitas proyecciones de Lagrange-Lambert que admiten a x_0 como punto geodésico*:

$$\begin{cases} a = \lambda_0 \\ c > |t_0| \\ b = q_0 - 2 c^{-1} \operatorname{arc tgh} (c^{-1} t_0). \end{cases}$$

Estas condiciones vienen de (7.22) y (7.26). ¿Cómo optimizar la elección de c ? El método que propone Lagrange —sección anterior— proporciona la proyección de exponente $c = c_L$ con la propiedad $g_{qq} = 0$. La figura 7.18 muestra las gráficas de $g_{\lambda\lambda}$ y g_{qq} en función de c . Además de c_L , debe tenerse en cuenta,

como veremos después, el valor de c donde $g_{\lambda\lambda} = g_{qq}$ y que llamamos c_E . A partir de (7.55) se deduce que

$$c_E^2 = \frac{1}{2} (c_L^2 + t_0^2). \quad (7.56)$$

Si utilizamos (7.54) y (7.32), se expresa así:

$$c_E^2 = r_0^2 K_0 + t_0^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0. \quad (7.57)$$

En la esfera se tiene $c_E = 1$, valor asociado con la proyección estereográfica.

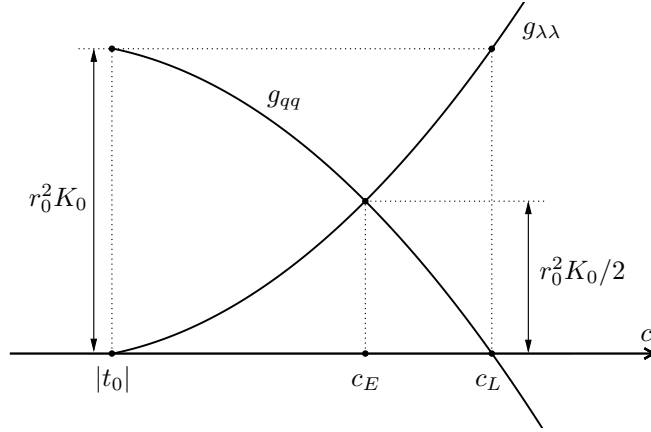


Fig. 7.18. Gráficas de $g_{\lambda\lambda} = (c^2 - t_0^2)/2$ y $g_{qq} = (c_L^2 - c^2)/2$, los autovalores de la hessiana de $g = \log \sigma$ en un punto geodésico de latitud φ_0 , en el intervalo $c > |t_0|$.

Según ilustra la figura 7.18, el valor de c respecto a c_L determina la categoría del punto geodésico x_0 . En efecto, $\mu_1 > 0$, luego:

1. x_0 es parabólico si $c = c_L$ ($\mu_2 = 0$).
2. x_0 es hiperbólico si $c > c_L$ ($\mu_2 < 0$).
3. x_0 es elíptico si $c < c_L$ ($\mu_2 > 0$).

Además, la aproximación cuadrática (7.53) de g es:

$$Q(x) = g_0 + \frac{1}{2} \mu_1 (\lambda - \lambda_0)^2 + \frac{1}{2} \mu_2 (q - q_0)^2,$$

pues la base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ coincide con la base canónica. Analicemos cada uno de los tres casos.

1. Punto parabólico

Si $c = c_L$, el punto geodésico x_0 es parabólico. En virtud de (7.54) y (7.55) se tiene que $\mu_1 = r_0^2 K_0$, luego la aproximación cuadrática de g en x_0 es

$$Q(x) = g_0 + \frac{1}{2} r_0^2 K_0 (\lambda - \lambda_0)^2,$$

que representa un cilindro parabólico —véase la figura 7.19—. En la esfera se tiene

$$Q(x) = g_0 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2.$$

Si llamamos $\varepsilon = g(x) - g_0$, entonces las dos rectas

$$|\lambda - \lambda_0| = \left(\frac{2\varepsilon}{r_0^2 K_0} \right)^{1/2}, \quad (7.58)$$

son la aproximación de segundo orden de las curvas de nivel de g . Dichas rectas coinciden con dos meridianos simétricos respecto a $\lambda = \lambda_0$.

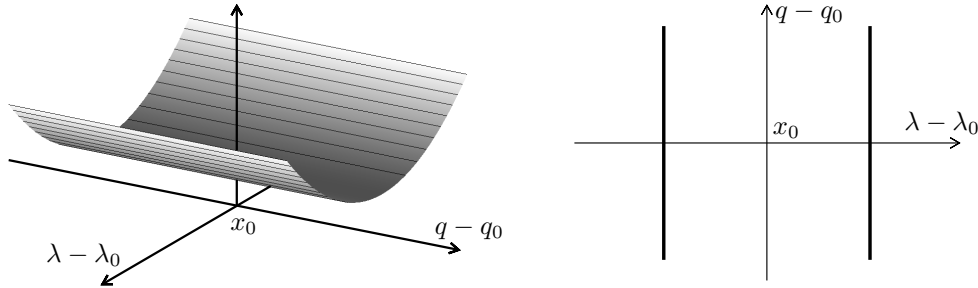


Fig. 7.19. Izquierda: aproximación cuadrática de g si $c = c_L$ (cilindro parabólico). Derecha: aproximación de las curvas de nivel de g .

Si el punto geodésico x_0 es parabólico, entonces $\det H = 0$. Por tanto se requiere más análisis para conocer su naturaleza respecto a la función g . Algunos autores llaman *degenerados* a dichos puntos [Marsden y Tromba, 1991, § 4.2, p. 256]. En nuestro caso, x_0 es un punto silla de g , según demostramos a continuación.

Por una parte, $g_{\lambda\lambda}(x_0) = \mu_1 > 0$, luego $\lambda = a$ es un mínimo de g en la dirección $q = q_0$ —véase la figura 7.12—. Por otra, $q = q_0$ es un punto de inflexión de g en la dirección $\lambda = a$. En efecto,

$$g(a, q) = \log(kc) - \log r - \log(1 + \cosh[c(q - b)]),$$

en virtud de (7.18). Entonces

$$g_{qqq}(a, q) = -2r^2 K \sin \varphi (1 + 2e'^2 \cos^2 \varphi) + \frac{c^3 \sinh [c(q-b)]}{(1 + \cosh [c(q-b)])^2}.$$

Si añadimos las condiciones $g_q(x_0) = 0$ y $g_{qq}(x_0) = 0$ (punto geodésico parabólico), la fórmula anterior se reduce:

$$g_{qqq}(x_0) = -r_0^2 K_0 \sin \varphi_0 (1 + 4e'^2 \cos^2 \varphi_0).$$

Por tanto g_{qqq} es distinto de cero, si x_0 no pertenece al ecuador. En la figura 7.13 se mostró la gráfica de la función $g(a, q)$.

Observación. El desarrollo de orden cuatro de la escala infinitesimal puede consultarse en [König y Weise, 1951, p. 379, ecuaciones (157) y (158)].

2. Punto hiperbólico

Si $c > c_L$, el punto geodésico x_0 es hiperbólico. Como $\det H < 0$, entonces x_0 es un punto silla de g [Marsden y Tromba, 1991, § 4.2, Teorema 5 y comentarios]. La aproximación cuadrática de g en x_0 es

$$Q(x) = g_0 + \frac{1}{4} (c^2 - t_0^2) (\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{1}{4} (c^2 - c_L^2) (q - q_0)^2,$$

que representa un paraboloide hiperbólico o silla de montar —véase la figura 7.20—. Las hipérbolas

$$(c^2 - t_0^2) (\lambda - \lambda_0)^2 - (c^2 - c_L^2) (q - q_0)^2 = 4\varepsilon,$$

con $\varepsilon = g(x) - g_0$, son la aproximación de segundo orden de las curvas de nivel de g , mostradas en la figura 7.21.

3. Punto elíptico

Si $c < c_L$, el punto geodésico x_0 es elíptico. En este caso, $\det H > 0$ luego x_0 es un mínimo de g [Marsden y Tromba, 1991, § 4.2, Teorema 5]. La aproximación cuadrática de g en x_0 es

$$Q(x) = g_0 + \frac{1}{4} (c^2 - t_0^2) (\lambda - \lambda_0)^2 + \frac{1}{4} (c_L^2 - c^2) (q - q_0)^2,$$

que representa un paraboloide elíptico —véase la figura 7.22—.

Las elipses centradas en x_0 :

$$(c^2 - t_0^2) (\lambda - \lambda_0)^2 + (c_L^2 - c^2) (q - q_0)^2 = 4\varepsilon, \quad (7.59)$$

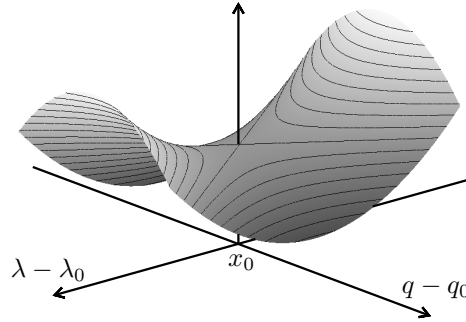


Fig. 7.20. Aproximación cuadrática de g cuando $c > c_L$ (paraboloide hiperbólico).

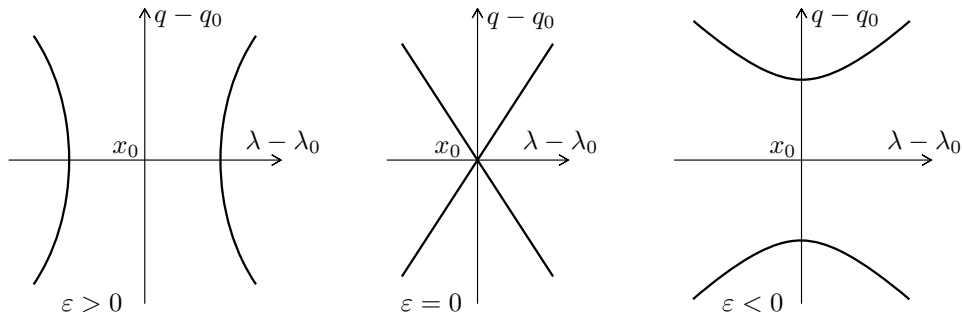


Fig. 7.21. Familia de hipérbolas que aproximan las curvas de nivel de $g(x) = g_0 + \varepsilon$ cuando $c > c_L$.

con $\varepsilon = g(x) - g_0$, son la aproximación de segundo orden de las curvas de nivel de g . Los dos semiejes de cada elipse coinciden con las direcciones este-oeste y norte-sur:

$$a_{EW} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{(c^2 - t_0^2)^{1/2}} \quad \text{y} \quad a_{NS} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{(c_L^2 - c^2)^{1/2}},$$

respectivamente. Su razón, que llamamos n , satisface:

$$n^2 = \frac{a_{EW}^2}{a_{NS}^2} = \frac{c_L^2 - c^2}{c^2 - t_0^2}, \quad (7.60)$$

es decir, $n^2 = g_{qq}/g_{\lambda\lambda}$. Las curvas de nivel son circunferencias si y solo si $n = 1$, condición que implica $c = c_E$, donde $c_E^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ según (7.57); este caso, en la esfera, se corresponde con la proyección estereográfica. La figura 7.23 ilustra nuestro análisis.

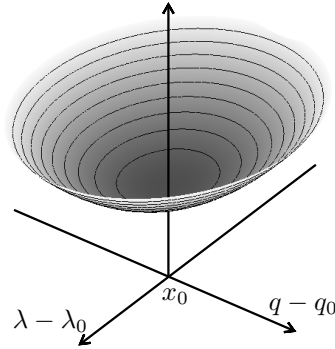


Fig. 7.22. Aproximación cuadrática de g cuando $c < c_L$ (paraboloide elíptico).

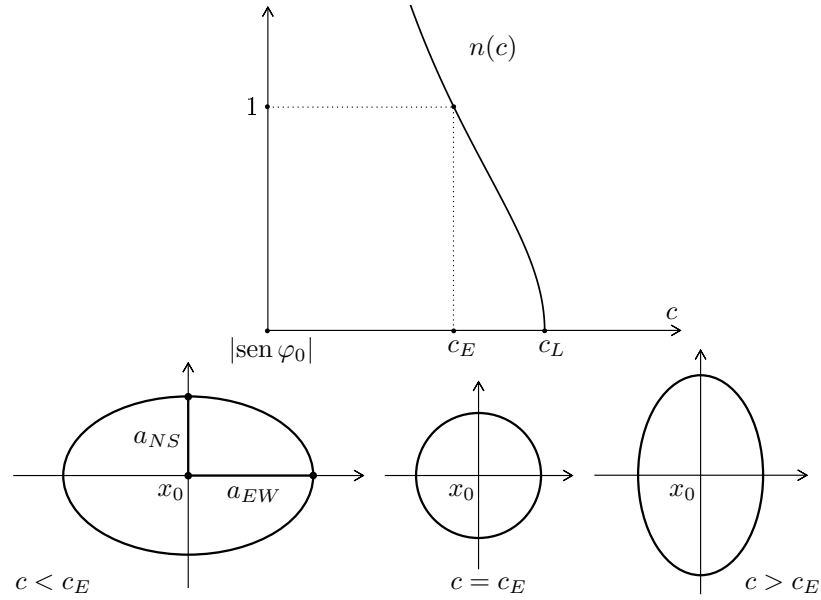


Fig. 7.23. Arriba: gráfica de la razón de los semiejes $n(c) = a_{EW}/a_{NS}$. Debajo: elipses que aproximan las curvas de nivel de g cuando $c < c_L$.

De las ecuaciones (7.60) y (7.50) se deduce que

$$c^2 = \frac{c_L^2 + t_0^2 n^2}{1 + n^2} = 1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{2 e'^2}{1 + n^2} \cos^4 \varphi_0.$$

En la esfera se tiene que

$$c^2 = 1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \cos^2 \varphi_0. \quad (7.61)$$

Chebyshev [1856a, p. 236] obtiene una expresión semejante a (7.61); en su caso la razón de semiejes de la elipse coincide con nuestra n pero él la llama $1/n$.

Elipses de Chebyshev. En 1856 Chebyshev escribe un artículo y un discurso, ambos con el título *Sur la construction des cartes géographiques*, dedicados a la optimización de proyecciones conformes, en especial a las proyecciones de Lagrange-Lambert. En el artículo [Chebyshev, 1856a], primero establece la condición necesaria y suficiente para que una proyección conforme tenga distorsión mínima sobre una región de la esfera —define la distorsión como la amplitud de la función $g = \log \sigma$ —. A continuación aplica su principio a la familia de proyecciones de Lagrange-Lambert.

Considera un punto geodésico elíptico $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ en la esfera y obtiene la aproximación cuadrática de las curvas de nivel de g en x_0 [Chebyshev, 1856a, p. 235, última ecuación]:

$$\frac{\cos^2 \varphi_0 + c^2 - 1}{\cos^2 \varphi_0} x^2 + \frac{\cos^2 \varphi_0 - c^2 + 1}{\cos^2 \varphi_0} y^2 = \text{constante}, \quad (7.62)$$

donde (x, y) son las coordenadas cartesianas de las imágenes de puntos próximos a x_0 mediante la proyección estereográfica centrada en x_0 . La ecuación (7.62) coincide con (7.59) excepto el factor $\sec^2 \varphi_0$, debido a que nosotros utilizamos la parametrización (λ, q) , es decir, la proyección de Mercator. En efecto, la escala infinitesimal de esta proyección es $\sigma = dS/ds = \sec \varphi$, donde dS y ds son los respectivos elementos de arco del plano y la esfera. Entonces la elipse (7.59) se corresponde, en la esfera, con la elipse semejante cuyos semiejes miden

$$\frac{2\varepsilon^{1/2}}{(c^2 - t_0^2)^{1/2}} \cos \varphi_0 \quad \text{y} \quad \frac{2\varepsilon^{1/2}}{(c_L^2 - c^2)^{1/2}} \cos \varphi_0.$$

Si aplicamos a esta elipse la proyección estereográfica centrada en x_0 , cuya escala infinitesimal es igual a 1 en este punto, obtenemos la elipse de Chebyshev (7.62). ■

En adelante seguimos trabajando con la parametrización (λ, q) . En estas coordenadas, las curvas de nivel de g en un entorno de un punto geodésico elíptico $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ son las elipses (7.59):

$$(c^2 - \sin^2 \varphi_0) \Delta \lambda^2 + (c_L^2 - c^2) \Delta q^2 = 4\varepsilon, \quad (7.63)$$

donde $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$, $\Delta q = q - q_0$ y $\varepsilon = g(x) - g_0$. Sabemos que el exponente de la proyección debe ser tal que $|\sin \varphi_0| < c < c_L$, es decir,

$$c_E^2 - r_0^2 K_0 < c^2 < c_E^2 + r_0^2 K_0,$$

en virtud de (7.54) y (7.57). Por tanto podemos escribir

$$c^2 = c_E^2 + \alpha r_0^2 K_0, \quad \text{con } \alpha \in (-1, 1). \quad (7.64)$$

Al sustituir esta expresión de c^2 en (7.63), obtenemos

$$(1 + \alpha) \Delta \lambda^2 + (1 - \alpha) \Delta q^2 = \frac{4\epsilon}{r_0^2 K_0}. \quad (7.65)$$

Síntesis

En una proyección de Lagrange-Lambert (del elipsoide de revolución) de exponente c y centro $a + ib$, los puntos geodésicos en el meridiano principal tienen coordenadas geográficas (a, φ) , donde la latitud φ es solución de la ecuación

$$\text{arc tgh sen } \varphi - 2c^{-1} \text{arc tgh}(c^{-1} \text{sen } \varphi) - e \text{arc tgh}(e \text{sen } \varphi) = b.$$

Dado $x = (\lambda, \varphi)$, $|\varphi| < \pi/2$, existen infinitas proyecciones de Lagrange-Lambert que admiten a x como punto geodésico en el meridiano principal:

$$a = \lambda, \quad c > |\text{sen } \varphi| \quad \text{y} \quad b(c) = q - 2c^{-1} \text{arc tgh}(c^{-1} \text{sen } \varphi).$$

El valor del exponente c respecto a

$$c_L(\varphi) = \sqrt{2r^2 K + \text{sen}^2 \varphi} = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi + 2e'^2 \cos^4 \varphi} \quad (7.66)$$

determina la categoría del punto geodésico x :

$$\begin{cases} c < c_L \Rightarrow x \text{ elíptico y mínimo de } g = \log \sigma, \\ c = c_L \Rightarrow x \text{ parabólico y punto silla de } g, \\ c > c_L \Rightarrow x \text{ hiperbólico y punto silla de } g. \end{cases}$$

La unicidad de x depende primero de c y, después, de b —Teorema 7.4—:

- Si $c \leq 1$ o $c \geq \sqrt{2(1 + e'^2)}$ entonces x es único.
- Si $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$ entonces el número de puntos geodésicos es uno si $|b| > M$, dos si $|b| = M$ o tres si $|b| < M$, donde

$$M(c) = 2c^{-1} \text{arc tgh}(c^{-1} t_{\min}) - \text{arc tgh } t_{\min} + e \text{arc tgh}(e t_{\min})$$

y

$$t_{\min}(c) = \left[1 - \frac{-1 + \sqrt{1 + 8e'^2(c^2 - 1)}}{4e'^2} \right]^{1/2}.$$

En la esfera se tiene $t_{\min}(c) = \sqrt{2 - c^2}$. Por otra parte, $t_{\min}(c_L) = |\sin \varphi|$ y $M(c_L) = |b(c_L)|$. La figura 7.24 ilustra el resumen precedente; obsérvese que las gráficas de $M(c)$ y $b(c)$ son tangentes en $c = c_L$. En efecto, se comprueba que

$$M'(c_L) = -\frac{1}{c_L} \left[\frac{|\sin \varphi|}{r^2 K} + \frac{2}{c_L} \operatorname{arc tgh} \frac{|\sin \varphi|}{c_L} \right],$$

valor que coincide con $b'(c_L)$ si $\varphi < 0$ y con $-b'(c_L)$ si $\varphi > 0$. Por último, establecemos dos teoremas que amplían el Teorema 7.4.

Teorema 7.6. *Sea una proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c \leq 1$ o $c \geq \sqrt{2(1 + e'^2)}$ y centro $a + ib$, en coordenadas (λ, q) del elipsoide de revolución. Entonces existe un único punto geodésico, en el meridiano principal, que es:*

1. *Elíptico si $c \leq 1$.*
2. *Hiperbólico si $c > \sqrt{2(1 + e'^2)}$ o $c = \sqrt{2(1 + e'^2)}$ y $b \neq 0$.*
3. *Parabólico si $c = \sqrt{2(1 + e'^2)}$ y $b = 0$.*

Demostración. El Teorema 7.4 establece la existencia y unicidad del punto geodésico en el meridiano principal. Sea $x = (a, \varphi)$, $|\varphi| < \pi/2$, el punto geodésico y sea $c_L = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi + 2e'^2 \cos^4 \varphi}$. Si $c \leq 1$ se deduce que x es elíptico, pues $c < c_L$. Si $c > \sqrt{2(1 + e'^2)}$ entonces $c > c_L$, luego x es hiperbólico. Ahora supongamos que $c = \sqrt{2(1 + e'^2)}$. En este caso se tiene que $b = 0$ si y solo si $\varphi = 0$ (consúltese el análisis que precede al Teorema 7.4). Por tanto $b = 0$ implica $c = c_L$, es decir, $x = (a, 0)$ es parabólico. Si $b \neq 0$ entonces $c > c_L$, luego x es hiperbólico. ■

Teorema 7.7. *Sea una proyección de Lagrange-Lambert de exponente $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$ y centro $a + ib$, en coordenadas (λ, q) del elipsoide de revolución. Sea*

$$M(c) = 2c^{-1} \operatorname{arc tgh} (c^{-1} t_{\min}) - \operatorname{arc tgh} t_{\min} + e \operatorname{arc tgh} (e t_{\min}) \quad (7.67)$$

donde

$$t_{\min} = \left[1 - \frac{-1 + \sqrt{1 + 8e'^2(c^2 - 1)}}{4e'^2} \right]^{1/2}.$$

1. *Si $|b| > M(c)$ la proyección tiene, en el meridiano principal, un único punto geodésico (a, φ) que es hiperbólico, con $|\sin \varphi| > t_{\min}$.*

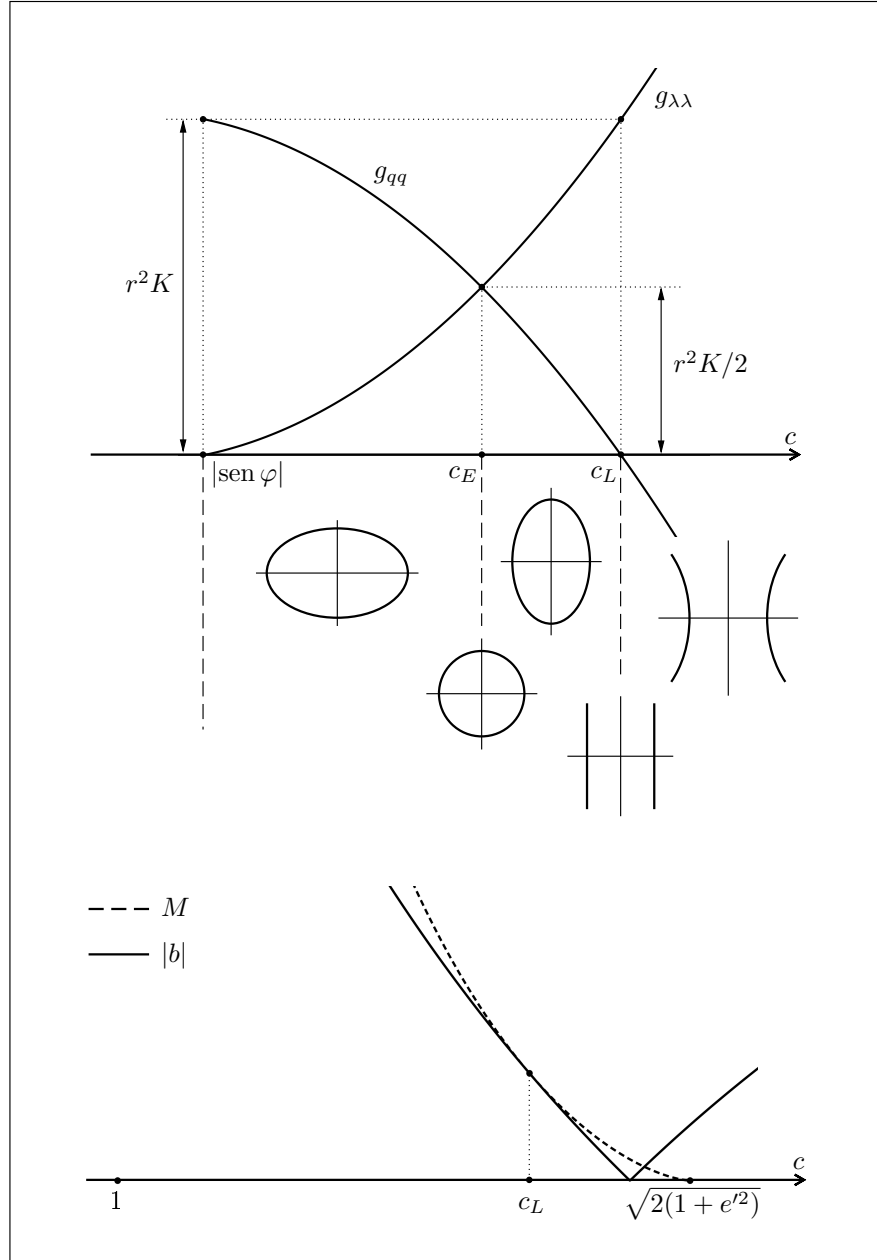


Fig. 7.24. Arriba: gráficas de $g_{\lambda\lambda}$ y g_{qq} , autovalores de la hessiana de $g = \log \sigma$ en un punto geodésico de latitud φ , en el intervalo $c > |\sin \varphi|$, junto a la aproximación cuadrática de las curvas de nivel de g . Debajo: gráficas de $|b|$ y M en el intervalo $1 < c < \sqrt{2(1+e'^2)}$, donde la proyección de Lagrange-Lambert de exponente c puede tener uno, dos o tres puntos geodésicos.

2. Si $|b| = M(c)$ la proyección tiene, en el meridiano principal, dos puntos geodésicos: uno parabólico, con $|\operatorname{sen} \varphi| = t_{\min}$, que además es un punto silla de $\log \sigma$, y uno hiperbólico, con $|\operatorname{sen} \varphi| > t_{\min}$.
3. Si $|b| < M(c)$ la proyección tiene, en el meridiano principal, tres puntos geodésicos: uno elíptico, con $|\operatorname{sen} \varphi| < t_{\min}$, y dos hiperbólicos, con $|\operatorname{sen} \varphi| > t_{\min}$.

Demostración. La existencia y el número de puntos geodésicos se deducen del Teorema 7.4. La categoría de los puntos geodésicos se basa en dos resultados.

A. Dado el exponente $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$, existe un único $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que

$$c = \sqrt{1 + \cos^2 \theta + 2e'^2 \cos^4 \theta}, \quad (7.68)$$

porque la función del segundo miembro establece una correspondencia biyectiva entre los intervalos $(0, \pi/2)$ y $(1, \sqrt{2(1 + e'^2)})$. De (7.68) se deduce que

$$\cos^2 \theta = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8e'^2(c^2 - 1)}}{4e'^2} = 1 - t_{\min}^2,$$

luego θ y t_{\min} guardan la relación $\operatorname{sen} \theta = t_{\min}$.

B. Sean $t = \operatorname{sen} \varphi$, donde φ es la latitud del punto geodésico, y

$$c_L(t) = \sqrt{2 - t^2 + 2e'^2(1 - t^2)^2},$$

el valor (7.66) que determina, comparado con c , la categoría del punto geodésico. La función $c_L(t)$ es par y además es estrictamente decreciente en $0 < t < 1$, porque

$$c_L(t) c'_L(t) = -t [1 + 4e'^2(1 - t^2)].$$

Por otra parte, dado $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$, se tiene que $c = c_L(\operatorname{sen} \theta)$ en virtud de (7.68), luego $c = c_L(t_{\min})$. Se concluye que

$$\begin{cases} |t| > t_{\min} \Rightarrow c_L(t) < c \Rightarrow \text{hiperbólico}, \\ |t| = t_{\min} \Rightarrow c_L(t) = c \Rightarrow \text{parabólico}, \\ |t| < t_{\min} \Rightarrow c_L(t) > c \Rightarrow \text{elíptico}. \end{cases}$$

Por último, t debe ser solución de la ecuación $F(t) = b$, donde

$$F(t) = \operatorname{arc tgh} t - 2c^{-1} \operatorname{arc tgh} (c^{-1}t) - e \operatorname{arc tgh} (et),$$

función que fue analizada en la Sección 7.2. La figura 7.25 muestra su gráfica y resume las siguientes conclusiones.

1. Si $|b| > M(c)$ entonces existe un único $t = \operatorname{sen} \varphi$ que es solución de $F(t) = b$ y además $|t| > t_{\min}$, luego el punto geodésico es hiperbólico.
2. Si $|b| = M(c)$ entonces $F(t) = b$ tiene dos soluciones: una que cumple $|t| = t_{\min}$, punto geodésico parabólico, y otra tal que $|t| > t_{\min}$, punto geodésico hiperbólico.
3. Si $|b| < M(c)$ hay tres soluciones: una con $|t| < t_{\min}$, punto geodésico elíptico, y dos con $|t| > t_{\min}$, puntos geodésicos hiperbólicos. ■

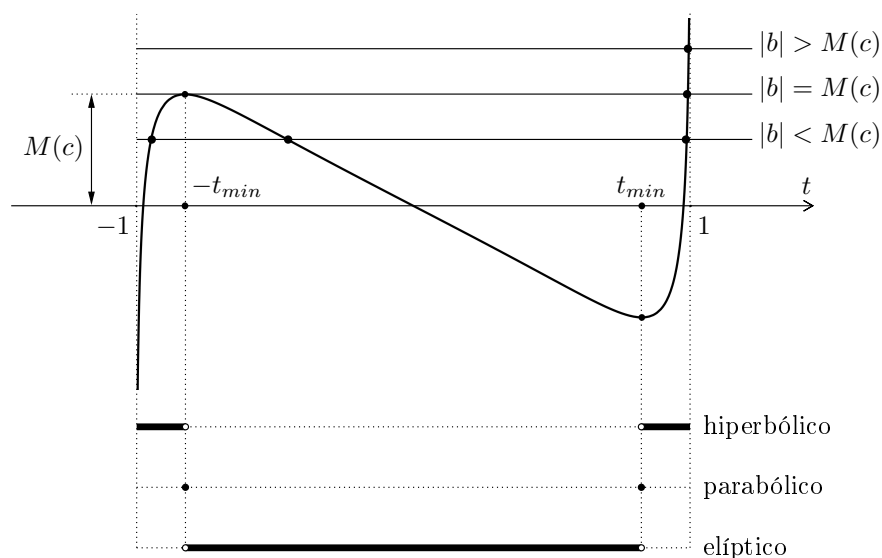


Fig. 7.25. Gráfica de $F(t) = \operatorname{arc tgh} t - 2c^{-1} \operatorname{arc tgh}(c^{-1}t) - e \operatorname{arc tgh}(et)$ en el intervalo $|t| < 1$, cuando $1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$.

Ejemplos

Presentamos dos ejemplos donde utilizamos los Teoremas 7.6 y 7.7. Lo hacemos para el elipsoide GRS80: $e = 0.081819191$ y $e' = 0.082094438$. Para dibujar la función $g = \log \sigma$ hemos tenido en cuenta que en las proyecciones de Lagrange-Lambert se tiene (suponemos $k = 1$)

$$g(\lambda, \varphi) = \log c - \log r - \log \{ \cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)] \},$$

donde

$$r = \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \quad \text{y} \quad q = \operatorname{arc tgh} \operatorname{sen} \varphi - e \operatorname{arc tgh}(e \operatorname{sen} \varphi).$$

En r hemos omitido el factor semieje mayor del elipsoide pues solo es una constante aditiva en g .

1. Sea $x_0 = (0, \pi/6)$ un punto del elipsoide de revolución. Se tiene que $\sin \varphi_0 = 1/2$. Existen infinitas proyecciones de Lagrange-Lambert que admiten a x_0 como punto geodésico en el meridiano principal:

$$a = 0, \quad c > 1/2 \quad \text{y} \quad b(c) = q_0 - 2c^{-1} \operatorname{arctgh}(2c)^{-1},$$

donde $q_0 = \operatorname{arctgh}(1/2) - e \operatorname{arctgh}(e/2)$. Además, $c_L(\varphi_0) = 1.3257$ después de aplicar (7.66), luego x_0 es un punto geodésico:

$$\begin{cases} \text{elíptico si } c < 1.3257, \\ \text{parabólico si } c = 1.3257, \\ \text{hiperbólico si } c > 1.3257. \end{cases}$$

Por ejemplo, si $c = 0.8$ entonces $b = -1.2870$. El Teorema 7.6 establece que x_0 es el único punto geodésico de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 0.8$ y centro $a + ib = -1.2870i$. Además, x_0 es elíptico y es un mínimo de la función $g = \log \sigma$. Véase la figura 7.26.

Si suponemos que $c = 1.5$ entonces $b = 0.0839$. Según el Teorema 7.6, x_0 es el único punto geodésico (pues $c \geq \sqrt{2(1+e^2)} = 1.4190$) de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1.5$ y centro $a + ib = 0.0839i$. En este caso, x_0 es hiperbólico y es un punto silla de g . Véase la figura 7.27. ■

2. Sea la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1.2$ y centro $a + ib = 0.1i$. Podemos aplicar el Teorema 7.7, pues $1 < c < \sqrt{2(1+e^2)}$. En este caso

$$t_{\min} = 0.7501 \quad \text{y} \quad M(c) = 0.2540,$$

luego $|b| < M$. Por tanto la proyección tiene tres puntos geodésicos en el meridiano principal, $\lambda = 0$: uno elíptico, con $|\sin \varphi| < t_{\min}$, y dos hiperbólicos, con $|\sin \varphi| > t_{\min}$. Estos puntos se obtienen al resolver la ecuación no lineal $F(t) = 0.1$, donde $t = \sin \varphi$ y

$$F(t) = \operatorname{arctgh} t - 2(1.2^{-1}) \operatorname{arctgh}(1.2^{-1}t) - e \operatorname{arctgh}(et).$$

La función `fzero` del software MATLAB permite resolverla: $t = -0.9213$, $t = -0.2535$ y $t = 0.9590$. La figura 7.28 recoge la gráfica de $F(t)$. Entonces los tres puntos geodésicos de la proyección son:

$$\varphi = -67.1^\circ \text{ hiperbólico}, \quad \varphi = -14.7^\circ \text{ elíptico}, \quad \varphi = 73.5^\circ \text{ hiperbólico}.$$

La figura 7.29 muestra que, en efecto, la función $g = \log \sigma$ a lo largo del meridiano principal tiene tres puntos críticos que se corresponden con los tres puntos geodésicos. ■

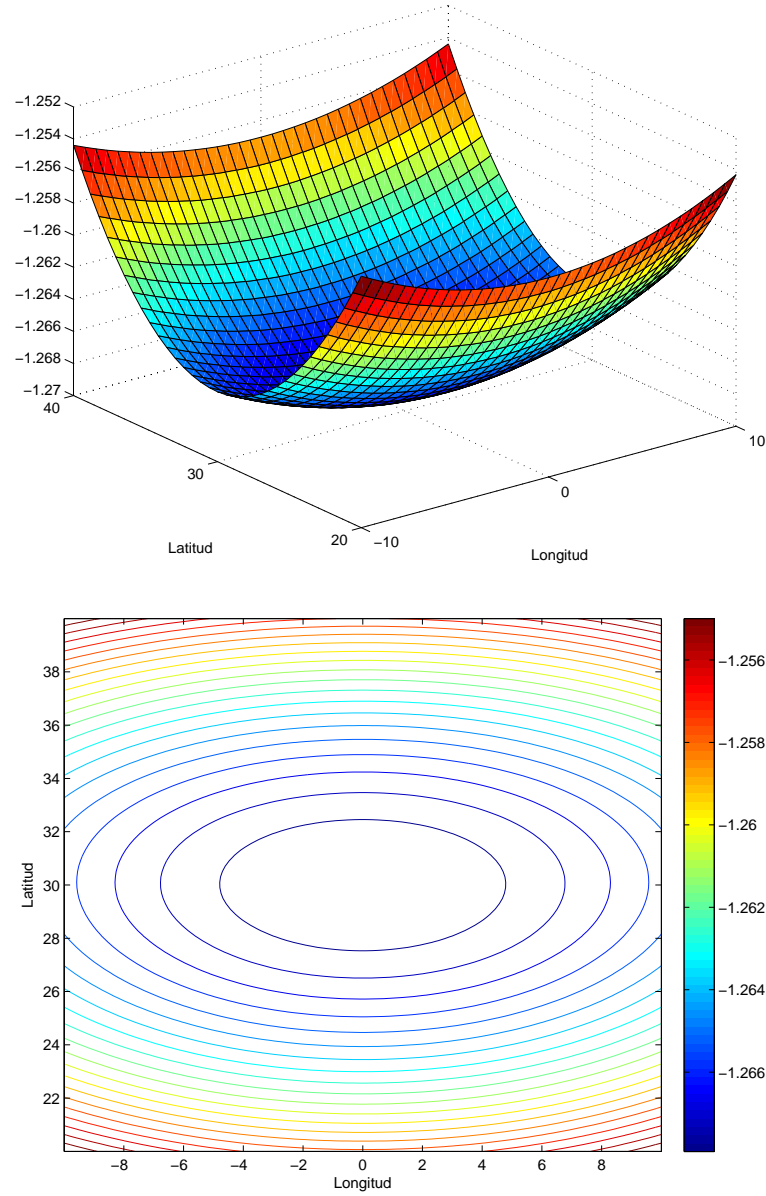


Fig. 7.26. Gráfica de $g = \log \sigma$ y curvas de nivel de g en el entorno del punto geodésico $x_0 = (0, \pi/6)$ de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 0.8$ y centro $a + ib = -1.2870i$.

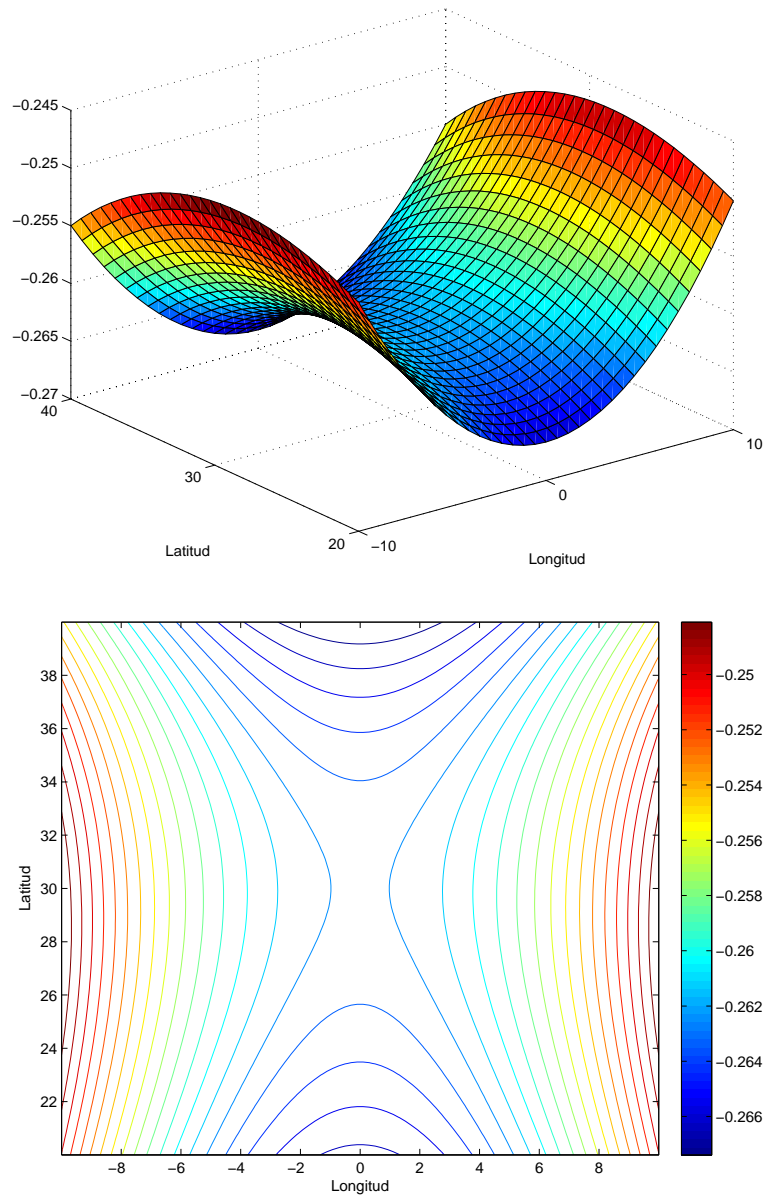


Fig. 7.27. Gráfica de $g = \log \sigma$ y curvas de nivel de g en el entorno del punto geodésico $x_0 = (0, \pi/6)$ de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1.5$ y centro $a + ib = 0.0839i$.

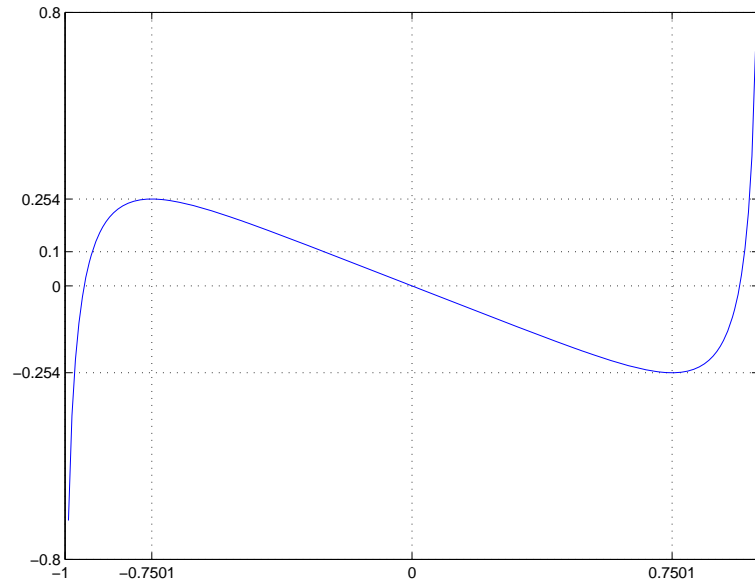


Fig. 7.28. Gráfica de $F(t) = \operatorname{arctgh} t - 2c^{-1} \operatorname{arctgh}(c^{-1}t) - e \operatorname{arctgh}(et)$ en el intervalo $|t| < 1$, con $c = 1.2$. La ecuación $F(t) = 0.1$ tiene tres soluciones.

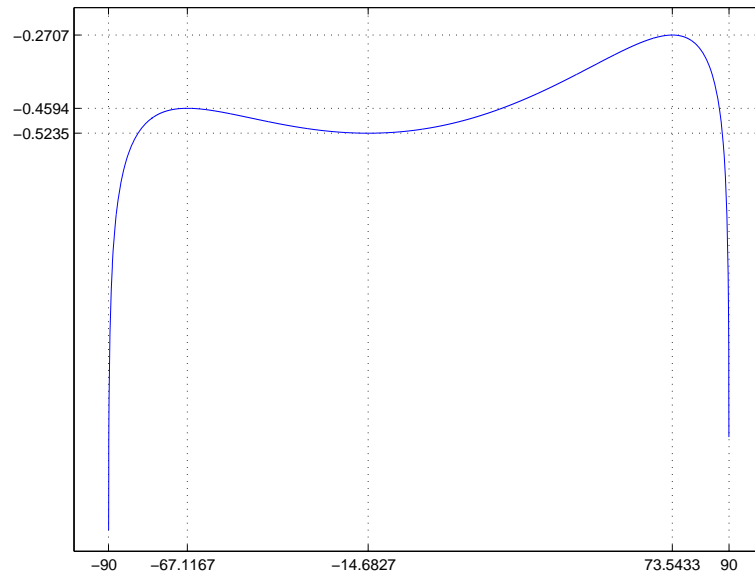


Fig. 7.29. Gráfica de $g(0, \varphi)$ de la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1.2$ y centro $a + ib = 0.1i$, en el intervalo $|\varphi| < \pi/2$.

Capítulo 8

Optimizaciones intermedia y global de las proyecciones de Lagrange-Lambert

En el capítulo anterior hemos analizado el comportamiento de una proyección conforme en un entorno de un punto geodésico (optimización local). Lo que llamamos optimización intermedia está basada en el concepto cuantitativo de distorsión introducido por Chebyshev y en la caracterización que él establece de las proyecciones conformes de distorsión mínima.

8.1. Teorema de Chebyshev-Gravé-Milnor

Sea p una proyección conforme definida en una región Ω del elipsoide. Según Chebyshev [1856a] la *distorsión* de p en Ω es la amplitud u oscilación de la función $g = \log \sigma$ en Ω :

$$\delta(g, \Omega) = \sup_{\Omega} g - \inf_{\Omega} g = \log \frac{\sup_{\Omega} \sigma}{\inf_{\Omega} \sigma}. \quad (8.1)$$

Esta cantidad (mayor o igual que cero) se anula si y solo si g es constante, que corresponde al caso ideal imposible de alcanzar. Se pregunta entonces Chebyshev [1856b, p. 241]: «¿Para qué proyección estos cambios de la razón de agrandamiento son los más pequeños?» Razón de agrandamiento denota escala infinitesimal. Es decir, ¿cuál es la proyección conforme sobre Ω de distorsión mínima?

Para responder a esta cuestión definimos primero el conjunto de funciones

$$M(\Omega) = \{g \in C^2(\Omega) : \Delta g = r^2 K \text{ en } \Omega\},$$

donde K es la curvatura de Gauss del elipsoide. Este conjunto es importante porque *existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $M(\Omega)$ y las proyecciones conformes sobre Ω , salvo movimientos rígidos del plano* [Milnor, 1969, p. 1109, Lema 5]. Sabemos que la escala infinitesimal asociada con una proyección conforme satisface la ecuación $\Delta \log \sigma = r^2 K$ en virtud de (7.1).

Observación. En la esfera de radio R , la ecuación $\Delta g = r^2 K$ se convierte en

$$g_{\lambda\lambda} + g_{q q} = \operatorname{sech}^2 q. \quad (8.2)$$

Para expresarla en coordenadas geodésicas (λ, φ) calculamos $g_q = g_\varphi \cos \varphi$ y $g_{qq} = \cos^2 \varphi (g_{\varphi\varphi} - g_\varphi \operatorname{tg} \varphi)$, donde hemos utilizado (1.5): $d\varphi/dq = \cos \varphi$. Por tanto (8.2) equivale a

$$g_{\lambda\lambda} \sec^2 \varphi - g_\varphi \operatorname{tg} \varphi + g_{\varphi\varphi} = 1. \quad (8.3)$$

Milnor [1969, Apéndice B] utiliza el *operador de Laplace-Beltrami*, \mathcal{L} , que satisface

$$R^2 \mathcal{L} g = g_{\lambda\lambda} \sec^2 \varphi - g_\varphi \operatorname{tg} \varphi + g_{\varphi\varphi}. \quad (8.4)$$

Entonces la ecuación que caracteriza a $M(\Omega)$ es $R^2 \mathcal{L} g = 1$. El operador \mathcal{L} fue introducido por Beltrami que lo llamó *segundo parámetro diferencial* [Struik, 1950, p. 160]:

$$\mathcal{L} g = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{Gg_u - Fg_v}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{Eg_v - Fg_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right\},$$

donde (u, v) son coordenadas curvilíneas de una superficie. Al hacer $(u, v) = (\lambda, \varphi)$, $E = R^2 \cos^2 \varphi$, $F = 0$ y $G = R^2$, se obtiene (8.4).

Los elementos $g \in M(\Omega)$ tales que $\delta(g, \partial\Omega) = 0$ juegan un papel principal (el símbolo ∂ designa la frontera). La segunda condición es cierta si y solo si g es constante en $\partial\Omega$. Es decir, estas funciones son las soluciones de los problemas de contorno

$$\begin{cases} g \in M(\Omega) \\ g = k \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.5)$$

con k real. Podemos expresar dichas soluciones como $g = g_0 + k$, donde g_0 es el elemento de $M(\Omega)$ que se anula en la frontera de Ω :

$$\begin{cases} g_0 \in M(\Omega) \\ g_0 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.6)$$

La condición de contorno en (8.5) equivale a $\sigma = \exp k$ en $\partial\Omega$; en particular, $\sigma = 1$ en $\partial\Omega$ en el problema (8.6). Obsérvese que $\delta(g, \Omega) = \delta(g_0, \Omega)$ para toda $g = g_0 + k$. Tenemos todos los elementos necesarios para formular el llamado *principio de Chebyshev*, que él establece sin demostración en [Chebyshev, 1856a, p. 234].

Teorema 8.1 (Chebyshev-Gravé-Milnor). *Sea Ω una región del elipsoide acotada por una curva cerrada simple. Entonces*

$$\delta(g_0, \Omega) < \delta(g, \Omega), \quad (8.7)$$

para todo $g \in M(\Omega) \setminus \{g_0 + k : k \in \mathbb{R}\}$.

La primera demostración de este teorema fue realizada por su discípulo Gravé [1911]. La desigualdad en (8.7) es estricta [Milnor, 1969, p. 1111]. Por su claridad, dejamos al propio Chebyshev [1856b, p. 242] comentar este resultado (el corchete y la cursiva son nuestros):

La solución definitiva del problema de la mejor proyección [conforme] es muy sencilla: la mejor proyección para la representación de cierta parte de la superficie terrestre en un mapa es aquella en la cual *la razón de agrandamiento conserva un mismo valor sobre el límite de la region representada*.

Llamamos *distorsión conforme mínima* admisible para Ω a $\delta_0 = \delta(g_0, \Omega)$. Hemos calculado δ_0 para la región determinada por la España peninsular, Suiza y Portugal, tres ejemplos que utilizaremos también en las Secciones 8.2 y 8.3. Para ello empleamos la herramienta Partial Differential Equation (PDE) del software MATLAB, que resuelve el Problema (8.6) por el método de elementos finitos (consúltese *Partial Differential Equation Toolbox User's Guide*, versión 1.0.15, 2009, The MathWorks, Inc.). Los resultados obtenidos son:

	España	Suiza	Portugal
δ_0	0.0007524	5.080×10^{-5}	6.979×10^{-5}

Véase la figura 8.1 creada con PDE.

En el caso de España, Bermejo y Otero [2005] han estimado el valor $\delta_0 = 0.0007487$ por medio también de elementos finitos (software COMSOL Multiphysics), y han determinado las distorsiones δ_l y δ_{utm} de la mejor proyección cónica conforme de Lambert y la proyección UTM (huso 30 extendido) respectivamente para dicha región:

$$\delta_0 = 0.0007487, \quad \delta_l = 0.002302 \approx 3.1 \delta_0, \quad \delta_{utm} = 0.003338 \approx 4.5 \delta_0.$$

Proyección estereográfica

Sea $\Omega = D(x_0, \alpha)$ el disco geodésico de centro x_0 y radio $\alpha \in (0, \pi)$ en la esfera unidad —véase la figura 8.2—. La escala infinitesimal de la proyección estereográfica centrada en x_0 es $\sigma = \sec^2(\psi/2)$ en virtud de (1.16), donde $0 \leq \psi < \pi$ es la distancia geodésica respecto a x_0 . Entonces

$$g(\psi) = -2 \log \cos(\psi/2),$$

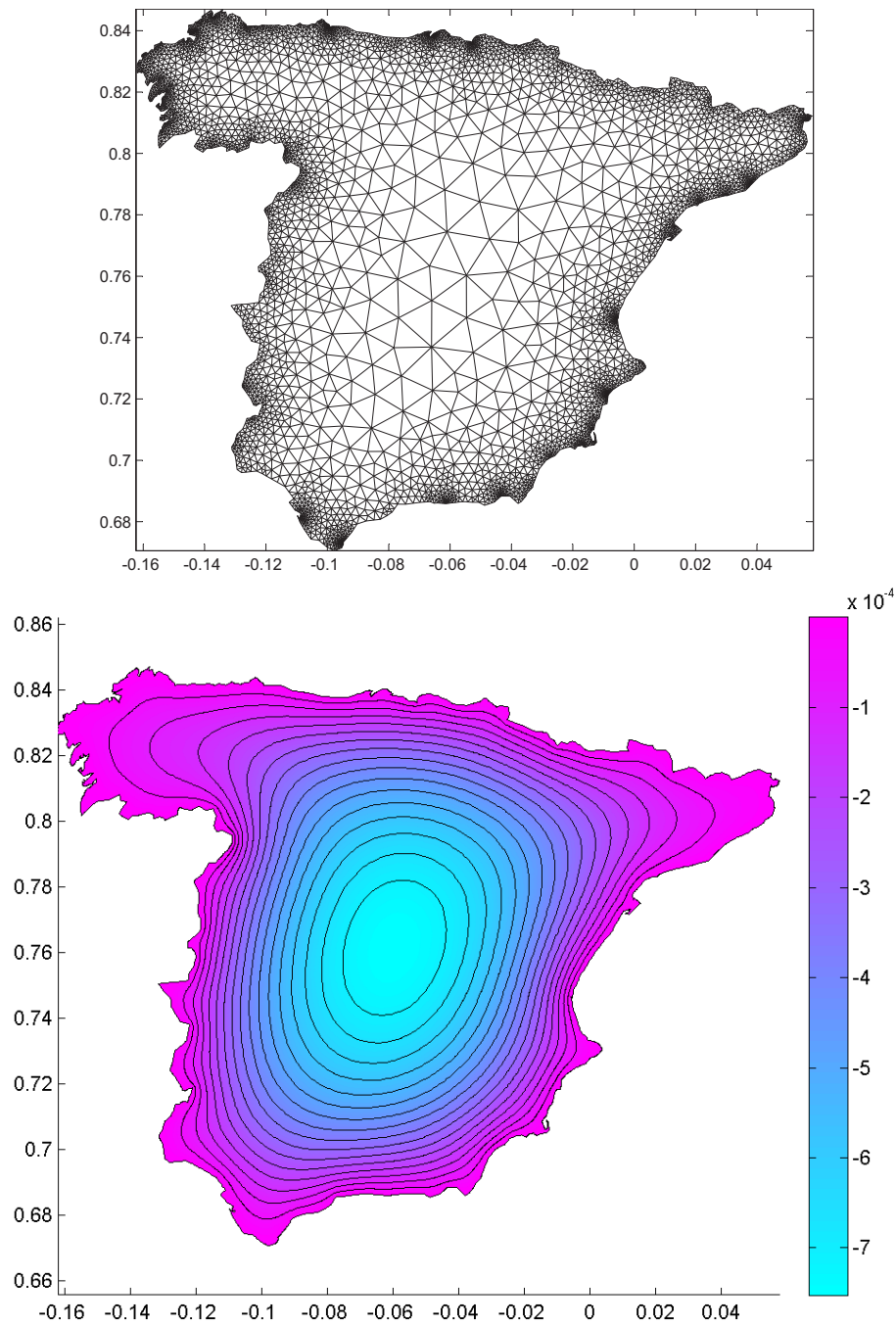


Fig. 8.1. Malla triangular creada por Partial Differential Equation para resolver el Problema (8.6). Debajo: curvas de nivel del logaritmo de la escala infinitesimal asociada con la mejor proyección conforme según Chebyshev para España. Los ejes están en coordenadas isométricas.

función creciente y positiva, que alcanza el mínimo en $\psi = 0$ donde se anula, según ilustra la figura 8.2. Luego la distorsión de esta proyección es, según (8.1): $\delta(g, \Omega) = g(\alpha)$. Como g es constante en la frontera de Ω , el Teorema de Chebyshev-Gravé-Milnor justifica que *la estereográfica es la mejor proyección conforme en cualquier disco geodésico cuyo centro coincida con el centro de la proyección*. Además,

$$\delta_0 = -2 \log \cos (\alpha/2)$$

es la distorsión conforme mínima admisible para el disco geodésico. Por ejemplo, si $\alpha = 5^\circ$ entonces $\delta_0 = 0.0019$.

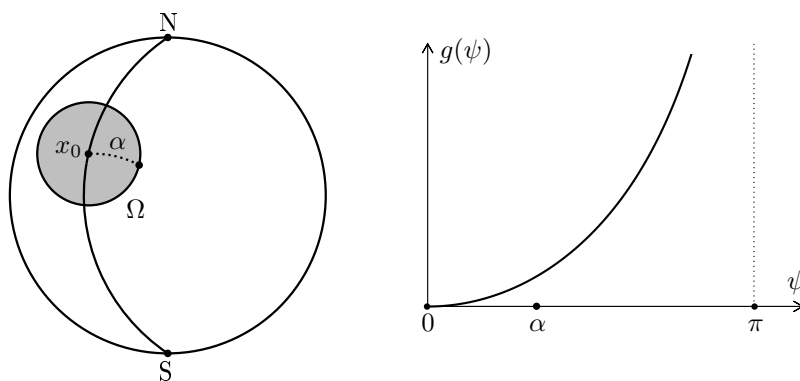


Fig. 8.2. La estereográfica centrada en x_0 es la mejor proyección conforme en un disco geodésico centrado en x_0 . A la derecha la gráfica de la función $g = \log \sigma$.

Se deduce que la frontera del disco geodésico es una curva de nivel de σ (lugar de los puntos tales que la escala infinitesimal no varía). Dicha frontera es una circunferencia contenida en la esfera. Su imagen, debido a las propiedades de la proyección estereográfica, es también una circunferencia. Por tanto *en el mapa de la proyección estereográfica centrada en x_0 las curvas de nivel de σ son circunferencias con centro común en la imagen de x_0* . Obtengamos la ecuación de estas circunferencias.

Observación. Kasner y De Cicco [1945, § 8] demuestran el resultado recíproco: la estereográfica y la cónica conforme de Lambert son las únicas proyecciones conformes de la esfera tales que sus curvas de nivel son circunferencias. También que la de Mercator es la única proyección conforme de la esfera tal que sus curvas de nivel son rectas.

En la esfera de radio R , la proyección estereográfica con centro en (λ_0, q_0) se corresponde con la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 1$, centro $a + ib = \lambda_0 - iq_0$ y $k = 2R \cosh q_0$, según demostramos en la Sección 6.2.

Consideremos las coordenadas distancia —véase la Sección 6.3—:

$$\mu = \sqrt{X^2 + (Y - 2R \cosh q_0)^2}, \quad \nu = \sqrt{X^2 + (Y + 2R \cosh q_0)^2}, \quad (8.8)$$

donde

$$\begin{cases} X = 2R \cosh q_0 \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)} \\ Y = 2R \cosh q_0 \frac{\sinh(q + q_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) + \cosh(q + q_0)} \end{cases} \quad (8.9)$$

son las ecuaciones de la proyección en virtud de (6.19). En las proyecciones de Lagrange-Lambert, la escala infinitesimal en función de las coordenadas distancia es [Lagrange, 1779, § 36, segunda ecuación]: $\sigma = c\mu\nu/(2kr)$, que se deduce de (6.28) y la identidad $mr\sigma = 1$. En nuestro caso se tiene: $c = 1$, $r = R \operatorname{sech} q$ y, según (6.26), $\exp q = \nu\mu^{-1} \exp(-q_0)$. Entonces

$$\sigma = \frac{1}{8R^2 \cosh q_0} (e^{q_0} \mu^2 + e^{-q_0} \nu^2).$$

Al sustituir (8.8) y simplificar, obtenemos

$$\sigma(X, Y) = 1 + \frac{1}{4R^2} [X^2 + (Y - 2R \sinh q_0)^2]. \quad (8.10)$$

Esta ecuación determina, para cada valor de σ , las curvas de nivel de la escala infinitesimal:

$$X^2 + (Y - 2R \sinh q_0)^2 = 4R^2 (\sigma - 1),$$

que son circunferencias centradas en el punto $(0, 2R \sinh q_0)$, que es la imagen de (λ_0, q_0) , el centro de la estereográfica. En efecto, en virtud de (8.9), se tiene $X = 0$, $Y = 2R \sinh q_0$ en (λ_0, q_0) . Obsérvese que $\sigma = 1$ en dicho punto, según (8.10).

Por ejemplo, si $(\lambda_0, \varphi_0) = (0, \pi/4)$ es el centro de la estereográfica en la esfera unidad, entonces la ecuación de las curvas de nivel de σ es

$$X^2 + (Y - 2)^2 = 4(\sigma - 1);$$

véase la figura 8.3.

8.2. Problema de Chebyshev

Chebyshev dedica el discurso [1856b] a la optimización de las proyecciones de Lagrange-Lambert según su principio establecido en el Teorema 8.1. Como

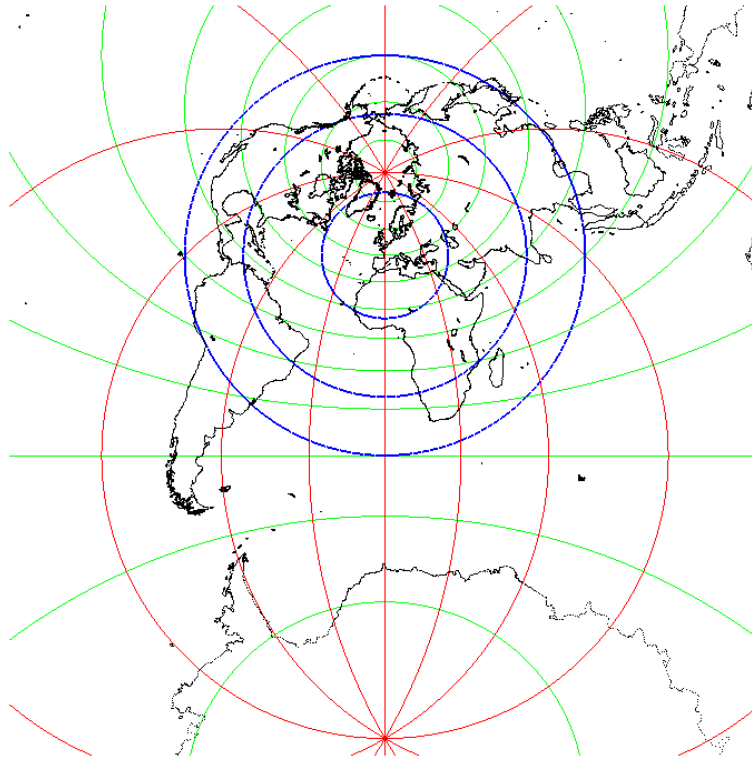


Fig. 8.3. Mapa de la proyección estereográfica centrada en $(\lambda_0, \varphi_0) = (0^\circ, 45^\circ)$ y curvas de nivel de la escala infinitesimal correspondientes a los valores 1.1, 1.5 y 2.

hizo un mes antes [Chebyshev, 1856a], se ocupa principalmente de aquellas que tienen un punto geodésico elíptico. Los Teoremas 7.6 y 7.7 justifican que el número de puntos geodésicos elípticos que puede tener una proyección de Lagrange-Lambert es a lo sumo igual a uno. En dicho punto la función $g = \log \sigma$ alcanza un valor mínimo, absoluto o relativo.

Llamamos *elípticas* a las proyecciones de Lagrange-Lambert que tienen un punto geodésico elíptico. Las dividimos en dos clases.

1. *Elípticas puras*, si el mínimo de g es absoluto. Según el Teorema 7.6, estas proyecciones no tienen ningún otro punto geodésico y su exponente debe ser $c \leq 1$. Véase la figura 8.4.
2. *Elíptico-hiperbólicas*, cuando el mínimo de g es relativo. En virtud del Teorema 7.7, el punto geodésico elíptico está situado entre dos puntos geodésicos hiperbólicos que son puntos silla de g . Los tres puntos están en el mismo plano $\lambda = a$. El exponente debe ser

$$1 < c < \sqrt{2(1 + e'^2)}$$

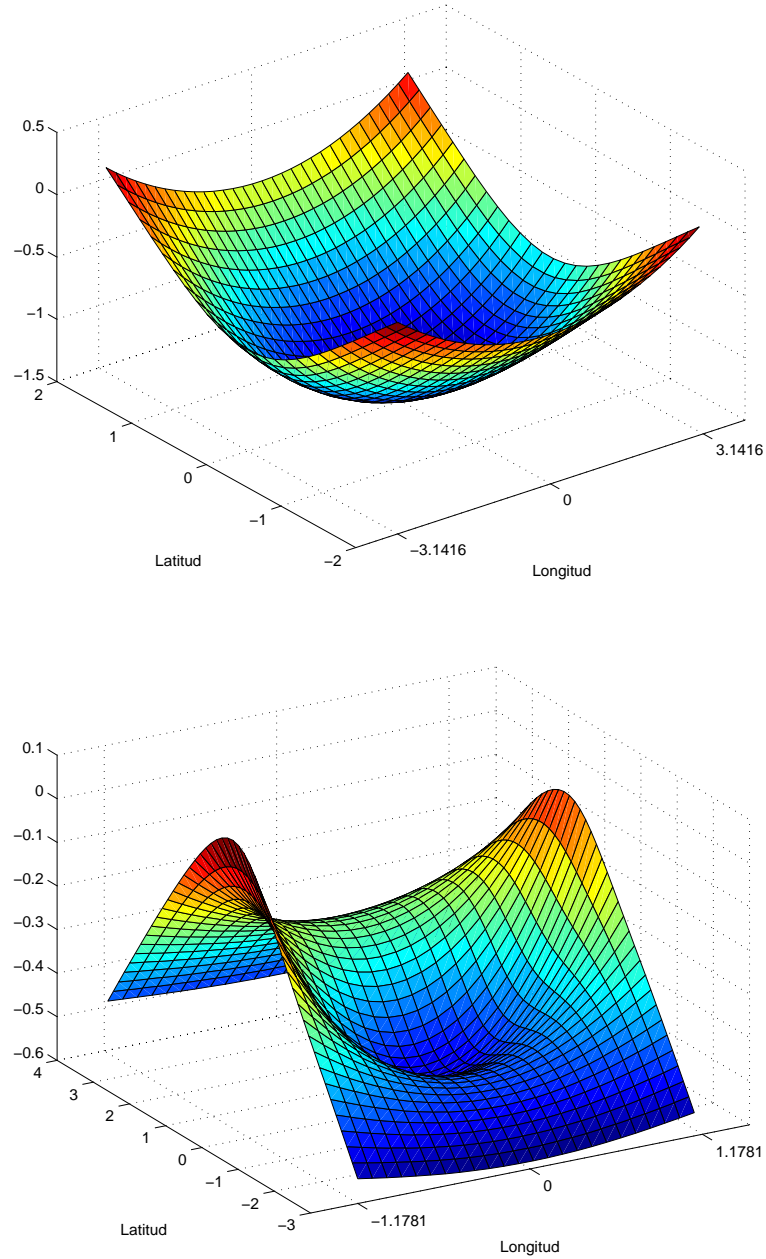


Fig. 8.4. Gráfica de g de dos proyecciones de Lagrange-Lambert elípticas. Arriba: elíptica pura con $(a, b, c) = (0, 0, 0.5)$ en la región $\{(\lambda, q) : |\lambda| \leq \pi, |q| \leq 2\}$. Debajo: elíptico-hiperbólica con $(a, b, c) = (0, 0.1, 1.2)$ en $\{(\lambda, q) : |\lambda| \leq 3\pi/8, -3 \leq q \leq 4\}$.

y además $|b| < M(c)$, donde $M(c)$ está determinado por (7.67). Véase la figura 8.4.

Parametrizamos las proyecciones elípticas mediante las coordenadas del punto geodésico elíptico $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ y el parámetro $\alpha \in (-1, 1)$ introducido en la Sección 7.4, ecuación (7.64): $c^2 = c_E^2 + \alpha r_0^2 K_0$, donde $c_E^2 = \sin^2 \varphi_0 + r_0^2 K_0$ y K_0 es la curvatura de Gauss del elipsoide. Las relaciones con las constantes fundamentales (a, b, c) son:

$$\begin{cases} a = \lambda_0 \\ c^2 = \sin^2 \varphi_0 + (1 + \alpha) r_0^2 K_0 \\ b = q_0 - 2 c^{-1} \operatorname{arc} \operatorname{tgh} (c^{-1} \sin \varphi_0). \end{cases} \quad (8.11)$$

En la esfera se tiene $c^2 = 1 + \alpha \cos^2 \varphi_0$.

Observación. Las restricciones $c^2 \leq 1$ (elíptica pura) y $1 < c^2 < 2(1 + e'^2)$ (elíptico-hiperbólica), impuestas al exponente de la proyección en la ecuación (8.11), permiten concluir que dado φ_0 la proyección es:

$$\text{elíptica pura} \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha_0, \quad \text{elíptico-hiperbólica} \Leftrightarrow \alpha > \alpha_0 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{r_0^2 K_0} - 1,$$

donde hemos tenido en cuenta que $|\alpha| < 1$. Por otra parte

$$\alpha_0 = \frac{-e'^2 \cos^2 \varphi_0}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0} = \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0}{e^2 \sin^2 \varphi_0 - 1}.$$

Sea $p_E(x_0, \alpha)$ una proyección elíptica. Consideremos las curvas de nivel de $g = \log \sigma$ que rodean al punto geodésico elíptico x_0 :

$$\gamma(\delta) = \{x \in I \times \mathbb{R} : g(x) - g(x_0) = \delta\}, \quad \delta > 0,$$

donde $I = [-\pi, \pi) \cap [a - \pi c^{-1}, a + \pi c^{-1}]$ es el intervalo (en longitud terrestre) donde la proyección es biyectiva. En un entorno de x_0 , estas curvas de nivel son óvalos: curva plana cerrada y convexa con curvatura distinta de cero en todos sus puntos [Klingenberg, 1978, § 2.4.1]. El tamaño de dicho entorno decrece al aumentar el valor del exponente de la proyección, como se aprecia en la figura 8.5.

Sea $\Gamma(\delta)$ la región del plano acotada por $\gamma(\delta)$. Si interesa especificar la proyección elíptica que da lugar a esta región, escribiremos $\Gamma(x_0, \alpha, \delta)$ y $\gamma(x_0, \alpha, \delta)$ respectivamente. El principio de Chebyshev, Teorema 8.1, justifica que:

La mejor proyección conforme para $\Gamma(\delta)$ es, excepto movimientos rígidos del plano, la proyección $p_E(x_0, \alpha)$ y la distorsión conforme mínima admisible para $\Gamma(\delta)$ es igual a δ .

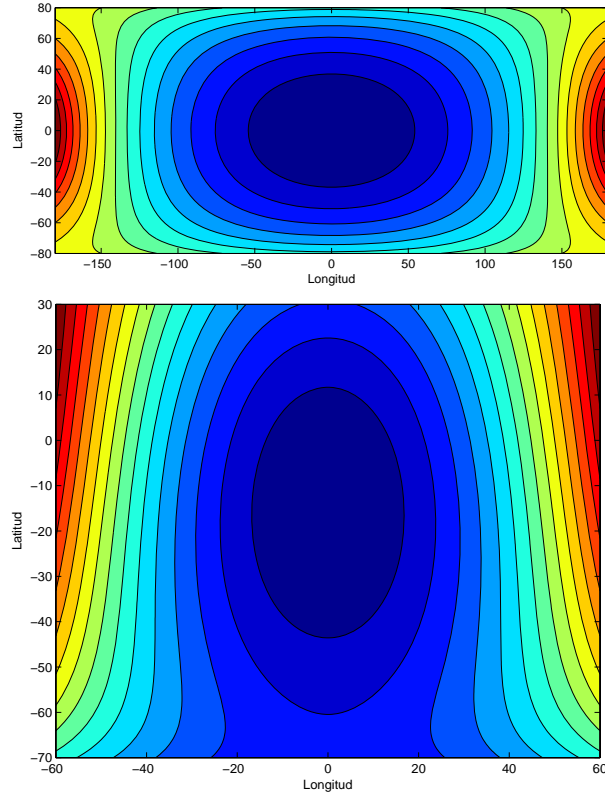


Fig. 8.5. Curvas de nivel de $g(\lambda, \varphi)$ en el entorno de un punto geodésico elíptico. Arriba: proyección elíptica pura con $(a, b, c) = (0, 0, 0.8)$. Debajo: proyección elíptico-hiperbólica con $(a, b, c) = (0, 0.1, 1.2)$.

La aproximación cuadrática de cada óvalo $\gamma(\delta)$ en puntos próximos a x_0 es la elipse

$$(1 + \alpha) \Delta\lambda^2 + (1 - \alpha) \Delta q^2 = k, \quad (8.12)$$

donde $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, $\Delta q = q - q_0$ y

$$k = \frac{4\delta}{r_0^2 K_0} = \frac{4\delta}{\cos^2 \varphi_0 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0)}, \quad (8.13)$$

según demostramos en la Sección 7.4, ecuación (7.65). Allí argumentamos nuestra denominación *ellipse de Chebyshev*. Si $\alpha = 0$ se obtiene la circunferencia de radio \sqrt{k} ; véase la figura 8.6. El centro de esta elipse es x_0 y los

semiejes coinciden con las direcciones este-oeste y norte-sur:

$$a_{EW} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+\alpha}} \quad y \quad a_{NS} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-\alpha}} \quad (8.14)$$

respectivamente. Por tanto

$$\alpha = \frac{1 - a_{EW}^2/a_{NS}^2}{1 + a_{EW}^2/a_{NS}^2}. \quad (8.15)$$

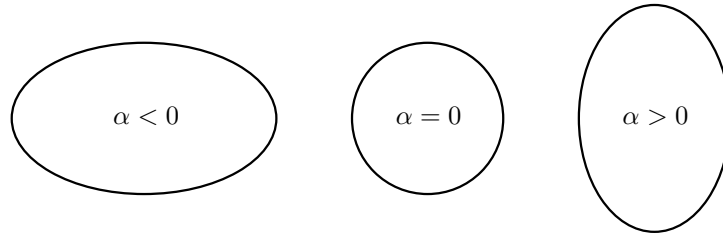


Fig. 8.6. El parámetro $\alpha \in (-1, 1)$ gobierna la forma de las elipses de Chebyshev.

Definimos el *radio bisector*, R , de una elipse $a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1$ como el módulo de cualquiera de los cuatro radio vectores que forman un ángulo de 45 grados con los semiejes de la elipse. Se comprueba que

$$R = \sqrt{2} (a^{-2} + b^{-2})^{-1/2}.$$

En la elipse de Chebyshev (8.12) se tiene que

$$\boxed{R = \sqrt{k}} \quad \text{luego} \quad \boxed{R = \frac{2\sqrt{\delta}}{\cos \varphi_0 \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0}}}. \quad (8.16)$$

Observamos que R no depende de α , es decir, el radio bisector de todas las elipses

$$\{(1 + \alpha) \Delta \lambda^2 + (1 - \alpha) \Delta q^2 = R^2 : |\alpha| < 1\}$$

es igual a R . Además, todas pasan por los cuatro puntos: $\sqrt{2} R/2 (\pm 1, \pm 1)$. En la figura 8.7 están dibujadas algunas elipses de Chebyshev con $R = 1$.

Sea Ω la región determinada por un país de pequeña o mediana extensión. Basado en lo expuesto anteriormente, Chebyshev adopta como mejor proyección de Lagrange-Lambert para Ω la proyección elíptica $p_E(x_0, \alpha)$ tal

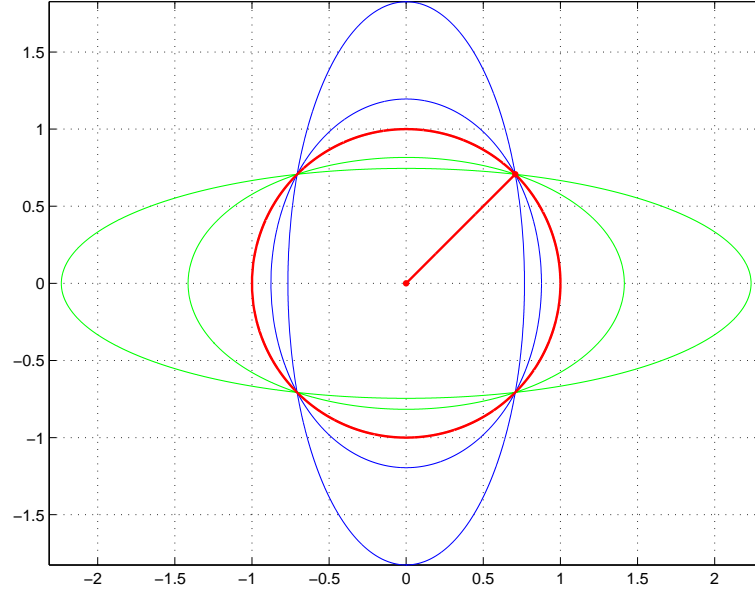


Fig. 8.7. Elipses de Chebyshev $(1 + \alpha)\lambda^2 + (1 - \alpha)q^2 = 1$ con valores de $\alpha \in \{-0.8, -0.5, 0, 0.3, 0.7\}$. El radio bisector de todas ellas es igual a uno.

que una de sus curvas de nivel $\gamma(x_0, \alpha, \delta_0)$ circunscribe a Ω y su distorsión, δ_0 , es mínima. Esto plantea lo que llamamos *problema de Chebyshev*:

$$\boxed{\text{minimizar } \delta \text{ constreñido por la condición } \partial\Omega \subset \overline{\Gamma(x_0, \alpha, \delta)}} \quad (8.17)$$

Este problema de optimización se simplifica en aproximación cuadrática. En efecto, (8.16) establece la proporcionalidad entre δ y R^2 , luego *minimizar la distorsión equivale a minimizar el radio bisector de las elipses de Chebyshev*. El procedimiento es el siguiente.

1. En cada punto x_0 buscamos la elipse (8.12) de radio bisector mínimo y que circunscribe a Ω . Esta elipse proporciona una distorsión.
2. Comparamos todas las distorsiones obtenidas y elegimos la menor, que corresponde a un x_0 y α concretos.

En virtud de (8.16), llamamos *elipse óptima de Chebyshev* para Ω a la elipse de Chebyshev en cuyo interior la distorsión es mínima. El propio Chebyshev [1856b, p. 245] concluye:

De toda la multitud de elipses que pueden circunscribirse alrededor de la región representada, la proyección más ventajosa se determinará por la menor [la plus petite] de estas elipses, si tomamos como medida de comparación de

las diferentes elipses la longitud del diámetro medio, que está igualmente inclinado hacia los dos ejes.

Ejemplo. La elipse óptima de Chebyshev para España, islas excluidas, está determinada por

$$x_0 = (-3.76^\circ, 40.23^\circ) \quad \text{y} \quad \alpha = -0.3801.$$

Véase la figura 8.8. En virtud de (8.11), la proyección elíptica $p_E(x_0, \alpha)$ obtenida es la proyección de Lagrange-Lambert de exponente $c = 0.88$ y centro $a + ib = -0.07 - 1.35i$, luego es una proyección elíptica pura. Más adelante exponemos el código que hemos creado para obtener la elipse óptima de Chebyshev. ■

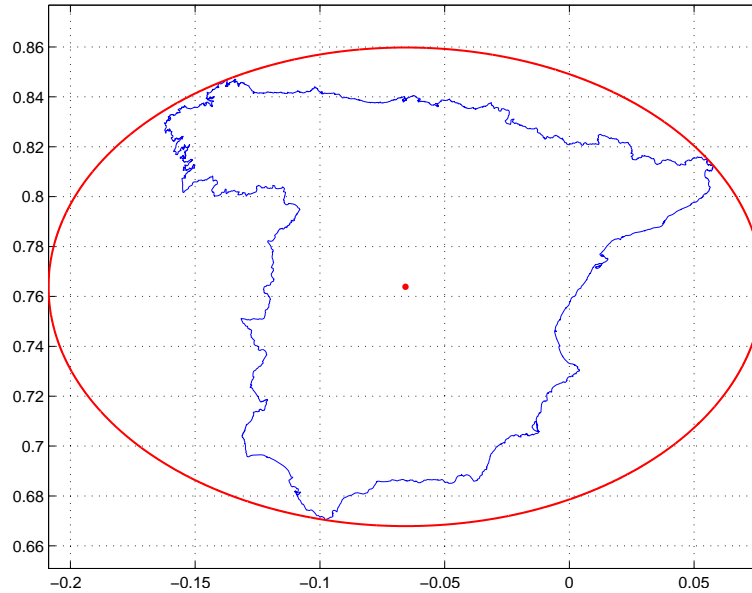


Fig. 8.8. Elipse óptima de Chebyshev para España. Los ejes están en coordenadas isométricas (λ, q) .

Formulemos el problema de optimización anterior en términos algebraicos —confróntese con [Silverman y Titterton, 1980]—. Para cada $\alpha \in (-1, 1)$ definimos la norma en \mathbb{R}^2 :

$$\|x\|_\alpha^2 = x^T A x, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$

Si $x = (\lambda, q)$ y $x_0 = (\lambda_0, q_0)$ entonces la elipse de Chebyshev (8.12) se expresa así: $\|x - x_0\|_\alpha^2 = k$. El problema consiste en encontrar la elipse óptima de

Chebyshev para una región dada Ω . Es decir, determinar x_0 y α (posición y forma de la elipse) tal que el radio bisector $R = \sqrt{k}$ sea mínimo, constreñido por la condición de circunscripción:

$$\|x - x_0\|_\alpha \leq R \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega. \quad (8.18)$$

Para facilitar la resolución del problema realizamos un cambio de coordenadas. Sea el isomorfismo (aplicación lineal biyectiva)

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto y = T_\alpha(x) = ((1 + \alpha)^{1/2}\lambda, (1 - \alpha)^{1/2}q), \end{aligned}$$

donde $x = (\lambda, q)$. Esta función transforma la elipse de Chebyshev en la circunferencia de centro $y_0 = T_\alpha(x_0)$ y radio $R = \sqrt{k}$. Entonces la condición (8.18) se escribe:

$$\|y - y_0\| \leq R \quad \text{para todo } y \in T_\alpha(\partial\Omega),$$

donde la norma es aquí la euclidiana y $T_\alpha(\partial\Omega)$ es la curva imagen de la frontera de Ω . Hemos simplificado el problema, que denominamos **PCH**(Ω) y se enuncia así:

PCH(Ω): minimizar $R(\alpha)$, con $\alpha \in (-1, 1)$, que es el radio de la circunferencia más pequeña que circunscribe a $T_\alpha(\partial\Omega)$.

En esta formulación están involucrados *dos problemas de minimización* que son, por orden de ejecución, los siguientes:

P1. Para cada $\alpha \in (-1, 1)$, determinar la circunferencia más pequeña que circunscribe a $T_\alpha(\partial\Omega)$. Esto proporciona la pareja $(y(\alpha), R(\alpha))$, el centro y el radio.

P2. Minimizar la función $R(\alpha)$, es decir, determinar el valor α que hace mínimo los radios mínimos. Véase la figura 8.9.

En la práctica, la frontera de un país está definida por un conjunto finito de puntos: $\partial\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ cuyo número depende de la resolución. La cuestión es determinar la circunferencia que circunscribe al conjunto de puntos $\{T_\alpha(x_1), \dots, T_\alpha(x_n)\}$. Véase, por ejemplo, [Rademacher y Toeplitz, 1970, Capítulo 16].

Nota histórica. El matemático británico J. J. Sylvester fue, en 1857, el primero que planteó el problema de encontrar la circunferencia más pequeña que circunscribe a un conjunto finito de puntos [Dearing y Zeck, 2009, § 2]. Por tanto un año después del trabajo de Chebyshev «without any suspicion of its having a practical application» [Blumenthal y Wahlin, 1941, § 4, p. 776]. Ambos matemáticos coincidieron en Londres debido al viaje que

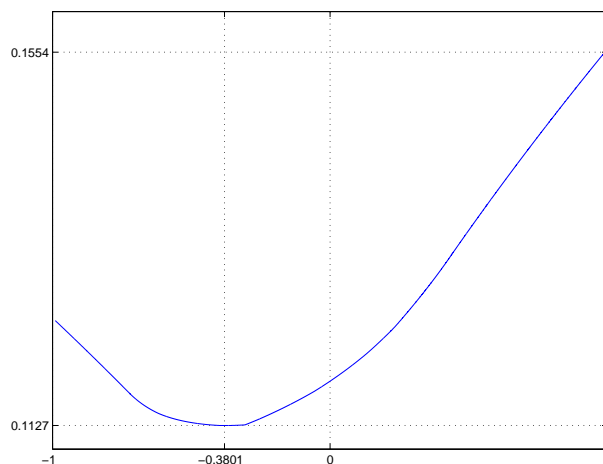


Fig. 8.9. Gráfica de la función $R(\alpha)$ en el caso de España (véase la figura 8.8).

Chebyshev realizó en 1852 a Francia, Inglaterra y Alemania. A este respecto, consúltese, por ejemplo, [Butzer y Jongmans, 1989, § 2] y [Butzer y Jongmans, 1999, § 5.1]. Chebyshev dejó constancia de dicho viaje en un informe [Chebyshev, 1852, p. xvi] donde se lee: «Arrivé à Londres, je me suis adressé aux deux géomètres anglais, M. M. Sylvester et Cayley. C'est à l'amabilité de ces savants que je dois d'un côté les conversations intéressantes concernant différentes branches des Mathématiques.»

Sea α_{opt} el valor que minimiza $R(\alpha)$ en el problema **P2**. Sean $y_0 = y(\alpha_{\text{opt}})$ y $R_{\text{opt}} = R(\alpha_{\text{opt}})$ el centro y el radio, respectivamente, de la circunferencia óptima que resuelve el problema **PCH**(Ω). Consideremos la aplicación inversa de T_α , con $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$, que también es un isomorfismo:

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\longmapsto x = T^{-1}(y) = ((1 + \alpha_{\text{opt}})^{-1/2} \lambda', (1 - \alpha_{\text{opt}})^{-1/2} q'), \end{aligned}$$

donde $y = (\lambda', q')$. Sea $x_0 = (\lambda_0, q_0) = T^{-1}(y_0)$, entonces T^{-1} transforma la circunferencia $\|y - y_0\| = R_{\text{opt}}$ en la elipse óptima de Chebyshev centrada en x_0 y de radio bisector R_{opt} :

$$(1 + \alpha_{\text{opt}}) (\lambda - \lambda_0)^2 + (1 - \alpha_{\text{opt}}) (q - q_0)^2 = R_{\text{opt}}^2. \quad (8.19)$$

En conclusión, sea Ω la región determinada por un país de pequeña o mediana extensión. El problema de Chebyshev (8.17) está resuelto, en aproximación cuadrática, si adoptamos la proyección elíptica $p_E(x_0, \alpha_{\text{opt}})$, donde los parámetros de posición y forma de la elipse, x_0 y α_{opt} , se obtienen al

resolver el doble problema de minimización $\mathbf{PCH}(\Omega)$. Esta proyección de Lagrange-Lambert es «la proyección más ventajosa» para Ω , en palabras de Chebyshev [1856b, p. 245], y una aproximación de su distorsión en el interior de la elipse óptima de Chebyshev (8.19) es, según (8.16),

$$\delta_0 = \frac{R_{\text{opt}}^2}{4} \cos^2 \varphi_0 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0) = \frac{R_{\text{opt}}^2}{4} r_0^2 K_0. \quad (8.20)$$

La elipse óptima de Chebyshev y la frontera de Ω tienen *tres, cuatro o cinco puntos en común* [support set] según demuestran Silverman y Titterton [1980, § 3, Teorema]. Sea $g = \log \sigma$ la función asociada a $p_E(x_0, \alpha_{\text{opt}})$. Se tiene que *el máximo de g en Ω se alcanza en los puntos de contacto de la elipse con la frontera de Ω* . En efecto, g es subarmónica en virtud de (7.1); el Principio del máximo de las funciones subarmónicas establece que g , restringida a Ω o al interior de la elipse, alcanza el máximo en las respectivas fronteras. Y un punto de la frontera de Ω que no sea un punto de contacto está en el interior de la elipse, luego g en dicho punto debe ser menor que en los puntos de la elipse. Entonces δ_0 *es una aproximación de la distorsión de $p_E(x_0, \alpha_{\text{opt}})$ en Ω* . Si g fuera constante en todos los puntos de la elipse (curva de nivel) entonces δ_0 sería la distorsión (exacta) de la proyección en Ω .

Resolución computacional

Utilizamos el software MATLAB para construir el código `minChebyshev` que mostramos más abajo. Su ejecución resuelve el problema de encontrar la elipse óptima de Chebyshev que circunscribe a un país. La entrada, `varargin`, es el nombre del país escrito con comillas simples. Estos nombres figuran en la base de datos `worldhi` (High-Resolution World Atlas Data; véase *Mapping Toolbox Reference Guide*, versión 1.2, 2000, The MathWorks, Inc.). Dicha base de datos proporciona las coordenadas geodésicas (λ, φ) de la frontera del país, y suponemos que están referidas al elipsoide GRS80, pues los datos se ofrecen sin ninguna referencia.

Llamamos `radiomin` a la función $R(\alpha)$, que definimos gracias al código `minboundcircle`, escrito por John R. D'Errico (2007), que forma parte de *A suite of minimal bounding objects* (suite of tools to compute minimal bounding circles, rectangles, triangles, spheres, incircles, etc.) y se encuentra en

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/34767-a-suite-of-minimal-bounding-objects/>.

Para minimizar $R(\alpha)$ utilizamos `fminbnd`, función interna de MATLAB. De este modo resolvemos el problema $\mathbf{PCH}(\Omega)$, es decir, obtenemos α_{opt} y R_{opt} .

Después transformamos los puntos de la frontera mediante el isomorfismo T_α con $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$. Utilizamos otra vez `minboundcircle` para obtener el centro de la circunferencia óptima, y la aplicación inversa de T_α proporciona el centro x_0 de la elipse óptima de Chebyshev. Y calculamos δ_0 según (8.20).

Finalmente obtenemos las constantes (a, b, c) de la proyección de Lagrange-Lambert elíptica $p_E(x_0, \alpha_{\text{opt}})$, según (8.11). Se calcula la distorsión global en el país: $\sup_\Omega g - \inf_\Omega g$, donde $g = \log \sigma$. Y dibujamos, en el plano (λ, q) , el país junto con la elipse óptima, esta gracias al código `ellipse` escrito por Andrew Schwartz (2009):

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25580-ellipse/>.

En las proyecciones de Lagrange-Lambert se tiene (suponemos $k = 1$) que

$$g(\lambda, \varphi) = \log c - \log r - \log \{ \cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)] \},$$

donde

$$r = \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad q = \text{arc tgh} \sin \varphi - e \text{ arc tgh} (e \sin \varphi). \quad (8.21)$$

En r hemos omitido el factor semieje mayor del elipsoide pues solo es una constante aditiva en g .

Observación. El código `minboundcircle` utiliza `convhulln`, función interna de MATLAB que calcula el polígono convexo más pequeño que contiene a un conjunto finito de puntos. Dicho polígono se denomina *envolvente convexa* (convex hull). Intuitivamente imagínese una banda elástica estirada que rodea al conjunto; si se suelta adopta la forma de la envolvente convexa. Su construcción y aplicaciones son objeto de la Geometría computacional; consúltese por ejemplo [Shamos, 1978, Capítulo 3]. La circunferencia más pequeña que circunscribe a un conjunto de puntos coincide con la más pequeña que circunscribe a la envolvente convexa. Esta propiedad reduce el tiempo de cálculo.

```
function [centroEiso,centroEgeo,alphaopt,aEW,aNS,a,b,c,distor,...
    distorAprox] = minChebyshev(varargin)
%% Datos iniciales
global x y
p = almanac('earth','ellipsoid','meters'); % Elipsoide GRS80 por defecto
e = p(2); % Primera excentricidad
ep2 = e^2/(1-e^2); % Cuadrado de la segunda excentricidad
% Región
Pais = worldhi(varargin);
k = floor(max(Pais.area));
Pais = worldhi(varargin,k); % Quitamos islas
```



```

%
latBorde = deg2rad(Pais.lat);
t = sin(latBorde);
qBorde = atanh(t)-e*atanh(e*t);
%
x = deg2rad(Pais.long);
y = qBorde;
%% El mínimo de los radios mínimos y el parámetro de forma respectivo
opciones = optimset('Display','notify','TolFun',1.e-12,'TolX',1.e-12,...
    'MaxFunEvals',1500,'MaxIter',1500);
[alphaopt,Ropt] = fminbnd(@radiomin,-1,1,opciones);
%% Isomorfismo T. Centro de la circunferencia óptima
Tx = sqrt(1+alphaopt)*x;
Ty = sqrt(1-alphaopt)*y;
[centroC,~] = minboundcircle(Tx,Ty);
%% Inversa de T. Centro de la elipse óptima
centroEiso = [centroC(1)/sqrt(1+alphaopt),centroC(2)/sqrt(1-alphaopt)];
q0 = centroEiso(2);
phi0 = convertlat(p,q0,'isometric','geodetic','rad');
t0 = sin(phi0);
centroEgeo = degrees2dms(rad2deg([centroEiso(1);phi0]));
%% Semiejes de la elipse óptima
aEW = Ropt/sqrt(1+alphaopt);
aNS = Ropt/sqrt(1-alphaopt);
%% Distorsión (global) en aproximación de segundo orden
r2K = cos(phi0)^2*(1+ep2*cos(phi0)^2);
distorAprox = Ropt^2*r2K/4; %
%% Proyección de Lagrange-Lambert y distorsión (global)
a = centroEiso(1);
c = sqrt(t0^2+(1+alphaopt)*r2K);
b = q0-2*atanh(t0/c)/c;
%
rB = cos(latBorde).*(1-e^2.*t.^2).^(-1/2); % Radio de los paralelos
gB = log(c)-log(rB)-log(cos(c*(x-a))+cosh(c*(y-b)));
gMax = max(gB);
r0 = (1-e^2*t0^2).^(-1/2)*cos(phi0);
gMin = log(c)-log(r0)-log(1+cosh(c*(q0-b)));
distor = gMax-gMin;
%% Figuras
plot(x,y,centroEiso(1),centroEiso(2),'r.','MarkerSize',12)
hold on
ellipse(centroEiso(1),centroEiso(2),aEW,aNS,0,10000,'r','LineWidth',1.25);
grid on
axis equal
print -depsc2 ElipseOptimaPais
%% Subfunción
function R = radiomin(alpha)
% Isomorfismo que transforma elipses en circunferencias
xp = sqrt(1+alpha).*x;

```

```

yp = sqrt(1-alpha).*y;
[~,R] = minboundcircle(xp,yp);
end
end

```

Ejemplos: España, Suiza y Portugal

Determinamos la elipse óptima de Chebyshev para cada uno de los países señalados en el epígrafe. Para ello ejecutamos nuestro código `minChebyshev`. Proporcionamos por este orden:

- La elipse óptima: centro, x_0 , en coordenadas geodésicas e isométricas, parámetro de forma, α_{opt} , y longitud de los semiejes.
- Constantes (a, b, c) de la proyección de Lagrange-Lambert $p_E(x_0, \alpha_{\text{opt}})$.
- Distorsión, δ , de dicha proyección en la región determinada por el país, y su aproximación, δ_{aprox} , según la fórmula (8.20).

Si $c \leq 1$, la proyección es elíptica pura y x_0 es mínimo absoluto de $g = \log \sigma$. Si $1 < c < \sqrt{2(1+e'^2)}$, es elíptico-hiperbólica y x_0 es mínimo relativo.

1. España. Utilizamos una base de datos de 4002 puntos del contorno de España peninsular, facilitada por el Instituto Geográfico Nacional. Estos datos estaban inicialmente en coordenadas UTM (huso 30 extendido), y los transformamos al sistema ED50 (European Datum 1950) cuyo elipsoide es el internacional o de Hayford 1924 ($f = 1/297$, $e = 0.081991889979$), datum en Potsdam (Alemania) y las longitudes referidas a Greenwich.

Las gráficas de la elipse óptima de Chebyshev para España y de la función $R(\alpha)$, radio de la circunferencia más pequeña que circunscribe a $T_\alpha(\partial\Omega)$, están expuestas a lo largo de esta sección: figuras 8.8 y 8.9 respectivamente. La elipse y la frontera de España tienen tres puntos en común. La siguiente tabla recoge los resultados obtenidos.

España. Elipse óptima de Chebyshev:

$$\lambda_0 = -3^\circ 45' 42.132'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 13' 54.454''$$

$$\lambda_0 = -0.0657, \quad q_0 = 0.7639$$

$$\alpha_{\text{opt}} = -0.3801, \quad a_{EW} = 0.1431, \quad a_{NS} = 0.0959$$

Proyección de Lagrange-Lambert (elíptica pura)

$$a = -0.0657, \quad b = -1.3460, \quad c = 0.8831$$

Distorsión de la proyección en España

$$\delta = 0.001952 \quad (\delta_{\text{aprox}} = 0.001858)$$

2. Suiza. Este ejemplo se debe a que podemos confrontar nuestros resultados. En efecto, en una nota de Nikolai Yakovlevich Tsinger [Zinger, 1906] dedicada a las proyecciones de Lagrange-Lambert se puede leer [p. 212]:

Il est intéressant de remarquer qu'en Suisse on s'occupe dernièrement de la même question: recherche d'une meilleure projection que celle de Bonn. Comme ce pays peut être entouré par une ellipse, ayant son centre au point $\varphi_0 = 46^\circ 45'$ et $L_0 = 8^\circ$, avec un demi-axe du méridien $a = 1^\circ 3'$ et $b = 1^\circ 44'$, on trouve en adoptant la projection de Lagrange:

$$C = 0.885 \quad \text{et} \quad \mu_{\text{max}} = 0.00012.$$

Los resultados de Tsinger se refieren a la esfera. El centro de la elipse óptima es $(\lambda_0, \varphi_0) = (8^\circ, 46^\circ 45')$. Los semiejes están en coordenadas geodésicas (λ, φ) : $a = 1^\circ 44'$ (este-oeste) y $b = 1^\circ 3'$ (norte-sur); estos semiejes en coordenadas isométricas (λ, q) son

$$a_{EW} = a \sec \varphi_0 = 0.0442 \quad \text{y} \quad a_{NS} = b \sec \varphi_0 = 0.0267.$$

Utilizamos (8.15) para calcular el parámetro de forma de la elipse:

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1 - a_{EW}^2/a_{NS}^2}{1 + a_{EW}^2/a_{NS}^2} = -0.4631.$$

El exponente de la proyección, según (8.11), es $c^2 = 1 + \alpha_{\text{opt}} \cos^2 \varphi_0$, y se comprueba que $c = 0.8846$. Por último, $\mu_{\text{max}} = a^2 b^2 / 2(a^2 + b^2)$ [Zinger, 1906, p. 211], luego

$$\mu_{\text{max}} = \frac{\cos^2 \varphi_0}{2} \frac{a_{EW}^2 a_{NS}^2}{a_{EW}^2 + a_{NS}^2} = \frac{k}{4} \cos^2 \varphi_0 = \delta,$$

aproximación de la distorsión (global) en Suiza, que hemos llamado δ_{aprox} . Las dos últimas igualdades se deben a (8.14) y (8.13) respectivamente.

La tabla que se presenta a continuación recoge nuestros resultados después de ejecutar `minChebyshev` (con la entrada '`Switzerland`') en la esfera. Las figuras 8.10 y 8.11 muestran, respectivamente, la gráfica de $R(\alpha)$ y la elipse óptima de Chebyshev. La elipse y la frontera de Suiza tienen cinco puntos en común.

Suiza. Elipse óptima de Chebyshev:

$$\lambda_0 = 7^\circ 59' 12.185'', \quad \varphi_0 = 46^\circ 47' 42.203''$$

$$\lambda_0 = 0.1394, \quad q_0 = 0.9264$$

$$\alpha_{\text{opt}} = -0.4681, \quad a_{EW} = 0.0445, \quad a_{NS} = 0.0268$$

Proyección de Lagrange-Lambert (elíptica pura)

$$a = 0.1394, \quad b = -1.7273, \quad c = 0.8835$$

Distorsión de la proyección en Suiza

$$\delta = 0.0001251 \quad (\delta_{\text{aprox}} = 0.0001233)$$

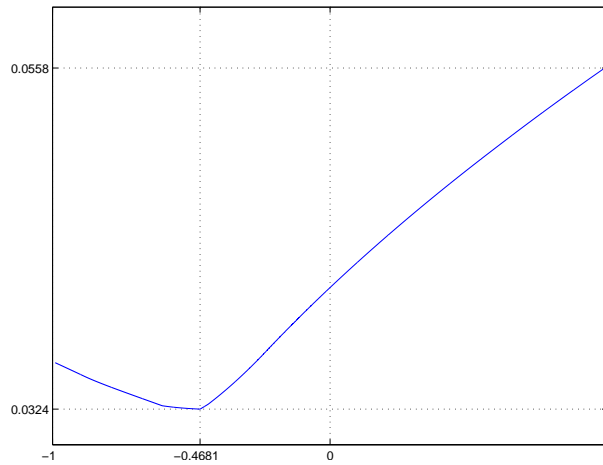


Fig. 8.10. Gráfica de la función $R(\alpha)$ para Suiza.

3. Portugal. Este ejemplo es pertinente porque muestra un caso donde α_{opt} está muy próximo a la unidad. Esto significa que la ecuación de la elipse óptima de Chebyshev (8.19) es

$$(\lambda - \lambda_0)^2 = \frac{R_{\text{opt}}^2 - \varepsilon}{1 + \alpha_{\text{opt}}},$$

donde $\varepsilon = (1 - \alpha_{\text{opt}})(q - q_0)^2$ es despreciable en un entorno de x_0 . Por tanto la elipse, en dicho entorno, se asemeja a dos rectas:

$$\lambda = \lambda_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R_{\text{opt}}, \quad (8.22)$$

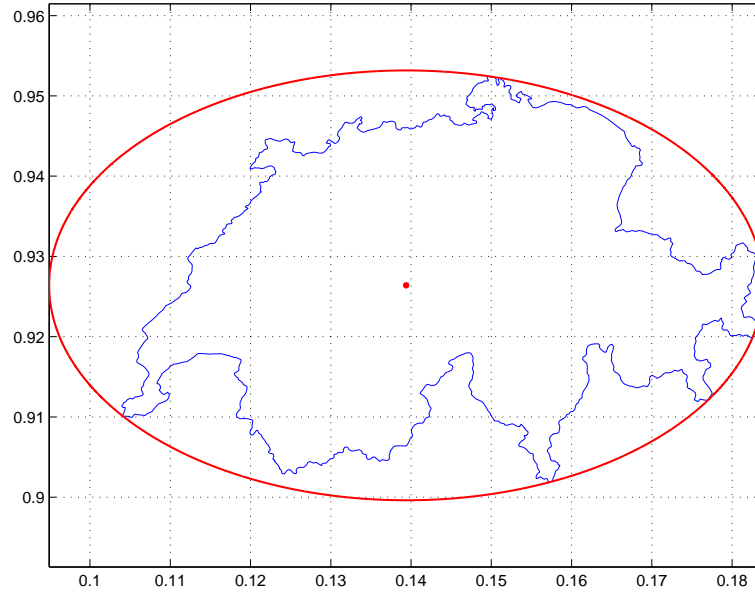


Fig. 8.11. Elipse óptima de Chebyshev para Suiza. Los ejes están en coordenadas isométricas (λ, q) .

que representan sendos meridianos equidistantes respecto a λ_0 .

La siguiente tabla presenta los resultados tras ejecutar `minChebyshev` (con la entrada `'Portugal'`) en el elipsoide GRS80: $e = 0.081819191$. La figura 8.12 muestra la gráfica de $R(\alpha)$ y en la figura 8.13 están dibujados el mapa de Portugal y un fragmento de la elipse. Las dimensiones del papel impiden observar el mapa junto con la elipse completa, como hicimos con España y Suiza, porque el semieje norte-sur, según (8.14): $a_{NS} = R_{\text{opt}}/\sqrt{1 - \alpha_{\text{opt}}}$, es extremadamente grande. Debido a la singularidad de este caso, la elipse y la frontera de Portugal solo tienen dos puntos en común.

Portugal. Elipse óptima de Chebyshev:

$$\lambda_0 = -7^\circ 50' 21.541'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 11' 36.563''$$

$$\lambda_0 = -0.1368, \quad q_0 = 0.7630$$

$$\alpha_{\text{opt}} = 0.99999998025, \quad a_{EW} = 0.0289, \quad a_{NS} = 290.95$$

Proyección de Lagrange-Lambert (elíptico-hiperbólica)

$$a = -0.1368, \quad b = -0.1346, \quad c = 1.260192667$$

Distorsión de la proyección en Portugal

$$\delta = 0.0002520 \quad (\delta_{\text{aprox}} = 0.0002449)$$

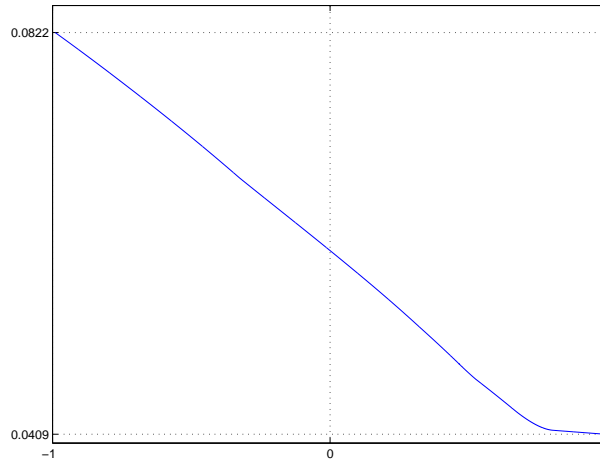


Fig. 8.12. Gráfica de la función $R(\alpha)$ para Portugal. El mínimo se alcanza en $\alpha_{\text{opt}} = 0.99999998025$.

Según nuestra clasificación de puntos geodésicos de las proyecciones de Lagrange-Lambert —Sección 7.4—, podemos afirmar que x_0 es un punto geodésico *cuasi parabólico*: confróntese (8.22) con (7.58). En efecto,

$$c_L(\varphi_0) = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0 + 2e'^2 \cos^4 \varphi_0} = 1.260192672,$$

y recordamos que la igualdad $c = c_L(\varphi_0)$ implica que x_0 es parabólico. En el caso de Portugal se tiene $|c - c_L(\varphi_0)| = 5 \cdot 10^{-9}$.

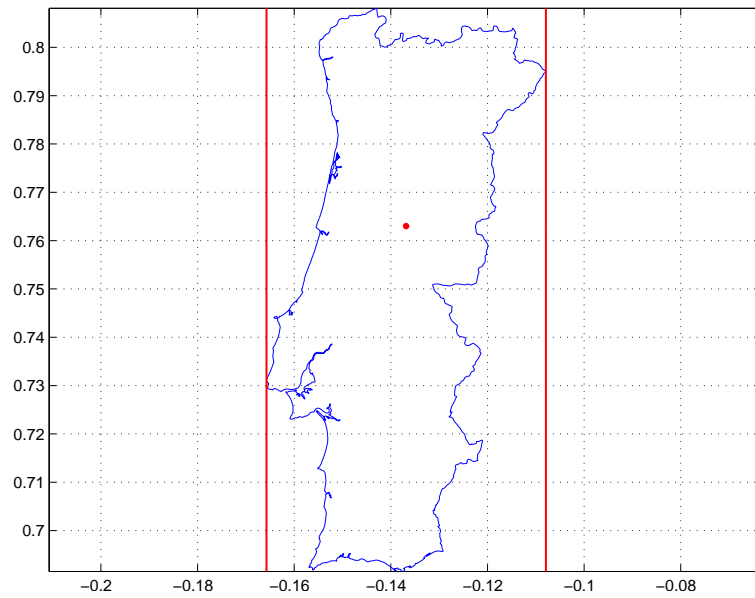


Fig. 8.13. Fragmento de la elipse óptima de Chebyshev para Portugal. Los ejes están en coordenadas isométricas (λ, q) .

Contribución de S. A. Laplaza en el caso de España

El matemático español Santos Anadón Laplaza, del Instituto Geográfico y Catastral, escribió un trabajo sobre proyecciones conformes, publicado en dos partes separadas (1940 y 1941) en la Revista Matemática Hispanoamericana. Debajo del título, *Cartografía conforme del elipsoide de revolución con aplicación al mapa de España*, se puede leer:

Contribución al tema internacional propuesto por la Asociación de Geodesia de la Unión Geodésica y de Geofísica en su Asamblea de Roma de 1922.
Resolución del problema planteado.

En la primera parte estudia el problema general de la representación plana conforme del elipsoide de revolución. La segunda [Laplaza, 1941], que nos interesa, es una aplicación al caso particular de España. En su introducción leemos [p. 141]:

Primeramente se hace un estudio crítico de las soluciones dadas a la Carta de España hasta ahora, estudiándose a continuación la solución, muy preferible a todas aquellas, que proporciona una Carta de Lagrange.

Para determinar la proyección de Lagrange-Lambert (a, b, c) más adecuada para España, Laplaza [1941, § 1, p. 148] elige cuatro vértices geodésicos «todos ellos muy próximos a la costa», de modo que el polígono que determinan se ajusta al contorno de España y contiene en su interior una gran parte del país. Las coordenadas geodésicas (λ, φ) y el nombre de estos vértices son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (-4^\circ 13' 12.77'', 43^\circ 44' 44.44''), \text{ Limo;} \\ x_2 = (-5^\circ 31' 25.56'', 43^\circ 9' 37.49''), \text{ Villano;} \\ x_3 = (-1^\circ 55' 18.72'', 36^\circ 0' 3.91''), \text{ Tarifa (faro);} \\ x_4 = (7^\circ 0' 11.86'', 42^\circ 19' 8.80''), \text{ Cabo de Creus.} \end{array} \right.$$

Estos valores se refieren al elipsoide de Struve; el origen de longitudes es el Observatorio Astronómico de Madrid. Laplaza exige que estos vértices pertenezcan a una misma curva de nivel de la escala infinitesimal. Esto implica tener el sistema de cuatro ecuaciones:

$$\sigma(x_1) = s, \quad \sigma(x_2) = s, \quad \sigma(x_3) = s \quad \text{y} \quad \sigma(x_4) = s, \quad (8.23)$$

con cuatro incógnitas (a, b, c, s) , que equivale al sistema de tres ecuaciones: $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$, $\sigma(x_2) = \sigma(x_3)$ y $\sigma(x_3) = \sigma(x_4)$, con tres incógnitas (a, b, c) .

En las proyecciones de Lagrange-Lambert la escala infinitesimal es (suponemos $k = 1$)

$$\sigma(x) = \frac{c r^{-1}(\varphi)}{\cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)]}, \quad x = (\lambda, \varphi),$$

donde $r(\varphi)$ y q están dados por (8.21). En el elipsoide de Struve se tiene [Laplaza, 1941, p. 162] $e^2 = 0.00677436$. Para resolver el sistema no lineal (8.23) utilizamos la función `fsolve` de MATLAB con valores iniciales $(a, b, c, s) = (0, 0, 1, 1)$, que están asociados, en la esfera, con la proyección estereográfica ecuatorial y meridiano principal $\lambda = 0$, que pasa por Madrid. La solución obtenida es

$$a = 0.0029, \quad b = -1.2139, \quad c = 0.9044 \quad \text{y} \quad s = 0.2909.$$

Esta es una proyección de Lagrange-Lambert elíptica pura $p_E(x_0, \alpha)$, pues $c \leq 1$. Luego tiene un único punto geodésico elíptico $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ donde $g = \log \sigma$ alcanza el mínimo absoluto. Según establecimos en la Sección 7.4, $\lambda_0 = a$ y φ_0 es la solución de la ecuación

$$\operatorname{arctgh} \operatorname{sen} \varphi - 2c^{-1} \operatorname{arctgh} (c^{-1} \operatorname{sen} \varphi) - e \operatorname{arctgh} (e \operatorname{sen} \varphi) = b,$$

que hemos resuelto con `fzero` de MATLAB: $\varphi_0 = 0.7009$. Despejamos α en (8.11):

$$\alpha = \frac{c^2 - (1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0)}, \quad e'^2 = e^2 / (1 - e^2),$$

y obtenemos $\alpha = -0.3146$.

En resumen, sea Ω la región determinada por España peninsular. Por los cuatro vértices escogidos por Laplaza pasa una curva de nivel de la función g asociada a $p_E(x_0, \alpha)$, que es un óvalo en un entorno de x_0 —véase el comienzo de la Sección 8.2—. La aproximación cuadrática de este óvalo es una elipse que contiene en su interior casi la totalidad de Ω como se comprueba en la figura 8.14. La ecuación de esta elipse es (8.12). La distorsión de la proyección p_E en el interior del óvalo, región que llamamos Γ , es

$$\delta(g, \Gamma) = \sup_{\Gamma} g - \inf_{\Gamma} g = \log s - g(x_0) = \log \frac{s}{\sigma(x_0)}.$$

Los resultados obtenidos por nosotros:

$$\begin{aligned} c &= 0.90435876, \\ \lambda_0 &= 0^\circ 10' 3.112'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 9' 38.501'', \\ \delta(g, \Gamma) &= 0.00185129, \end{aligned}$$

coinciden con los de Laplaza [1941, p. 162]. Resaltamos este hecho, la extraordinaria precisión manejada por Laplaza en un trabajo de los años cuarenta, donde el sistema a resolver (8.23) no es lineal y exige análisis numérico. Por otra parte, su método se basa en la elección óptima de los cuatro vértices, un inconveniente que detallamos al final de este apartado.

Para comparar los de Laplaza con nuestros resultados (Sección 8.3) y con los obtenidos cuando resolvimos el Problema de Chebyshev para España, hemos transformado las coordenadas de los vértices escogidos por Laplaza al sistema ED50, elipsoide internacional y longitudes referidas a Greenwich:

$$\begin{cases} x_1 = (-7^\circ 54' 22.85'', 43^\circ 44' 48.42''), \text{Limo}; \\ x_2 = (-9^\circ 12' 35.70'', 43^\circ 9' 41.63''), \text{Villano}; \\ x_3 = (-5^\circ 36' 29.74'', 36^\circ 0' 8.84''), \text{Tarifa (faro)}; \\ x_4 = (3^\circ 19' 1.36'', 42^\circ 19' 12.81''), \text{Cabo de Creus}; \end{cases}$$

gracias al Programa de Aplicaciones Geodésicas (PAG), versión 1.2, abril de 2014, del Instituto Geográfico Nacional. Después hemos resuelto (8.23) para estos vértices y los resultados son:

$$\begin{aligned} a &= -0.06141, \quad b = -1.2139, \quad c = 0.90435790, \quad s = 0.2909, \\ \lambda_0 &= -3^\circ 31' 7.431'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 9' 42.775'', \\ \delta(g, \Gamma) &= 0.00185119. \end{aligned}$$

La frontera de España, en la práctica, está definida por un conjunto finito de puntos. El polígono convexo más pequeño que contiene a dicho conjunto se llama envolvente convexa (ya hablamos de ella en la observación que precede al código `minChebyshev`). Lo hemos construido gracias a `convhull`, función interna de MATLAB, y se muestra en la figura 8.14 para confrontar con los cuatro vértices escogidos por Laplaza.

Un problema que dejamos abierto es la *selección óptima de los cuatro vértices que satisfacen el sistema (8.23) de modo que la distorsión de la proyección de Lagrange-Lambert sea mínima*. La selección de Laplaza no es aleatoria a la vista de tan buenos resultados. Para otro país que no sea España su método solo puede ejecutarse por tanteo, en ausencia de un algoritmo que determine los vértices óptimos. En cambio, nuestro código `minChebyshev` posee dos virtudes: su programación es sencilla y se puede ejecutar para cualquier país.

Laplaza no explica cómo selecciona los cuatro vértices. Quizá se basara en las investigaciones de Tissot [1881], no solo porque le cite [Laplaza, 1941, § 1, p. 148]:

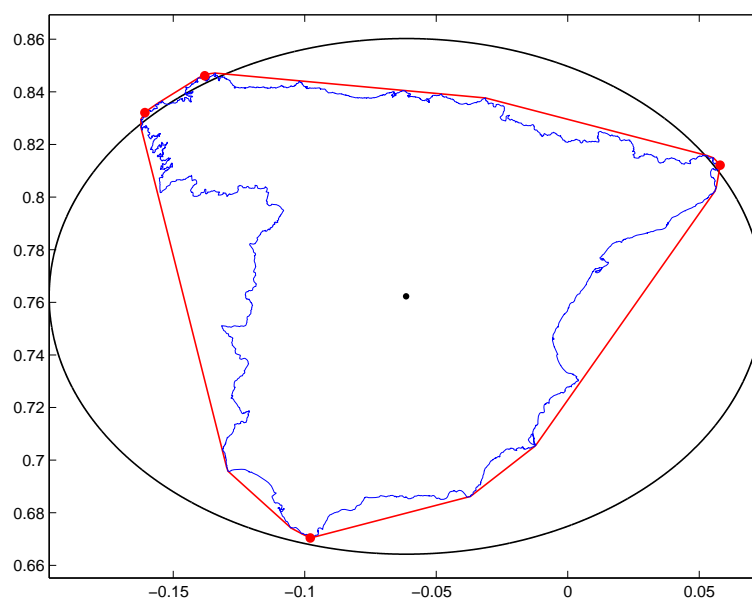


Fig. 8.14. Se muestra: la envolvente convexa (convex hull) de la frontera de España (polígono convexo de 28 vértices), los cuatro vértices geodésicos elegidos por Laplace y la elipse que aproxima la curva de nivel (del logaritmo de la escala infinitesimal) que pasa por los cuatro vértices. Los ejes están en coordenadas isométricas (λ, q) .

Primeramente hemos efectuado un tanteo gráfico utilizando, lo mismo que Tissot, elipses homotéticas con relación de ejes igual a 0,7 estando el eje menor en la dirección del meridiano respectivo. De esta manera hemos llegado a la conclusión de que una elipse con tales características y que pase por los cuatro vértices geodésicos indicados a continuación, todos ellos muy próximos a la costa, contiene prácticamente en su interior toda la Península.

En [Tissot, 1881, Capítulo 2, § 58, p. 61] podemos leer:

L'ellipse n° 8 [razón de ejes 0,7] est celle qui correspond au *minimum*. Lorsqu'on la place sur la carte auxiliaire de manière à envelopper l'Espagne, elle en touche le contour aux points suivants: cap Ortégal, cap Saint-Adrien, île de Tarifa, cap de Creus.

Observamos que Laplace coincide con Tissot en dos vértices: Tarifa y Cabo de Creus. Los otros dos, Limo y Villano, están muy próximos a los Cabos de Ortégala y San Adrián, según comprobamos en las figuras 8.14 y 8.15, esta última tomada del tercer volumen de los *Apuntes de Cartografía* del Servicio Geográfico del Ejército [1971, Capítulo 9, § 176, p. 156] donde se analiza el trabajo de Tissot citado.

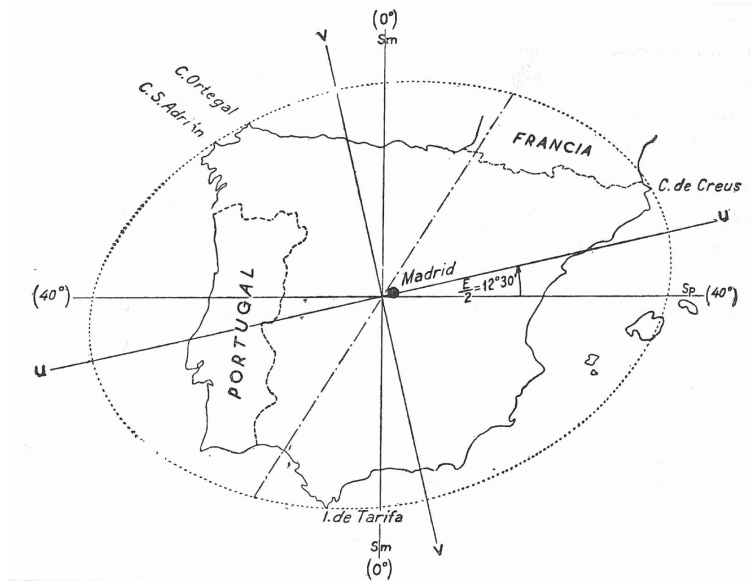


Fig. 8.15. Elipse obtenida por Tissot que toca el contorno de España en los cabos de Creus, Ortegal, San Adrián e isla de Tarifa.

8.3. Distorsiones relativa y absoluta

En la Sección 8.1 hemos definido la distorsión de una proyección conforme en una región Ω del elipsoide como la amplitud de la función $g = \log \sigma$:

$$\delta(g, \Omega) = \sup_{\Omega} g - \inf_{\Omega} g,$$

a la que en adelante llamamos *distorsión absoluta*. La optimización intermedia se basa en este concepto y en el Teorema 8.1 que establece que $\delta(g_0, \Omega) < \delta(g, \Omega)$ para todo $g \in M(\Omega) \setminus \{g_0 + k : k \in \mathbb{R}\}$, donde

$$M(\Omega) = \{g \in C^2(\Omega) : \Delta g = r^2 K \text{ en } \Omega\}$$

y $g_0 = \log \sigma_0$ está asociada con la mejor proyección conforme para Ω , con $\sigma_0 = 1$ en la frontera de dicha región. La cantidad $\delta_0 = \delta(g_0, \Omega)$ es la distorsión conforme mínima admisible para Ω .

Distorsión relativa

Definimos la *distorsión relativa* de una proyección conforme p en Ω como la amplitud de la diferencia $g - g_0$:

$$\delta_R(p, \Omega) = \sup_{\Omega} (g - g_0) - \inf_{\Omega} (g - g_0) = \log \frac{\sup_{\Omega} (\sigma/\sigma_0)}{\inf_{\Omega} (\sigma/\sigma_0)}.$$

Para la optimización global de una familia \mathcal{F} de proyecciones conformes podemos elegir el siguiente criterio: *minimizar la distorsión relativa*. La razón descansa en que la distorsión relativa es mayor o igual que cero y se anula si y solo si $g = g_0 + k$ en $\overline{\Omega}$, con k constante real, es decir, si y solo si p es la mejor proyección conforme para Ω , con $\sigma = \exp k$ en la frontera. Por consiguiente parece oportuno determinar $p \in \mathcal{F}$ cuya distorsión relativa sea mínima en \mathcal{F} .

Por ejemplo, en la familia de proyecciones de Lagrange-Lambert (suponemos que su constante fundamental $k = 1$) se tiene

$$g = \log c - \log r - \log \{ \cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)] \},$$

donde $r = r(q)$ es el radio del paralelo de latitud isométrica q . En la esfera unidad, $r = \operatorname{sech} q$. En el elipsoide no existe fórmula explícita de $r(q)$; sin embargo, es posible desarrollar $r(q)$ en serie de potencias de e^2 [Bermejo y Otero, 2005]. Aquí la cuestión es *determinar las constantes $\mathbf{c} = (a, b, c)$ de modo que la distorsión relativa δ_R sea mínima*,

$$\delta_R(\mathbf{c}) = \sup_{x \in \Omega} [g(x, \mathbf{c}) - g_0(x)] - \inf_{x \in \Omega} [g(x, \mathbf{c}) - g_0(x)]. \quad (8.24)$$

Aparentemente este problema es difícil porque necesitamos conocer g_0 , y esto exige resolver el Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta g = r^2 K & \text{en } \Omega \\ g = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

según expusimos en la primera sección, véase (8.6). Sin embargo, el siguiente resultado permite prescindir de g_0 .

Teorema 8.2. *Sea Ω una región del elipsoide acotada por una curva cerrada simple. La distorsión relativa de una proyección conforme p en Ω es igual a la amplitud de $g = \log \sigma$ en la frontera de Ω ,*

$$\delta_R(p, \Omega) = \sup_{\Omega} g - \inf_{\partial\Omega} g.$$

Demostración. Sea $g_0 = \log \sigma_0$ la función asociada con la mejor proyección conforme para Ω , con $\sigma_0 = 1$ en la frontera de esta región. La diferencia $g - g_0$ es una función armónica en Ω porque g y g_0 satisfacen la ecuación $\Delta g = r^2 K$. Entonces, según el Principio del máximo, tanto el máximo como el mínimo de $g - g_0$ se alcanzan en la frontera de Ω . Es decir,

$$\delta_R(p, \Omega) = \sup_{\Omega} (g - g_0) - \inf_{\Omega} (g - g_0) = \sup_{\partial\Omega} (g - g_0) - \inf_{\partial\Omega} (g - g_0).$$

Por último, téngase en cuenta que $g_0 = 0$ en la frontera de la región. ■

Minimizar (8.24) es ahora un problema más sencillo por dos razones: no es necesario conocer g_0 , y es suficiente calcular el máximo y el mínimo de g en la frontera de la región. La segunda cobra importancia en cartografía, pues la frontera de un país está definida por un conjunto finito de puntos; esto facilita el cálculo de los valores extremos de la función g .

Ejemplos: España, Suiza y Portugal

Determinamos la proyección de Lagrange-Lambert p_R que minimiza la distorsión relativa para cada uno de los países señalados en el epígrafe, considerados en la Sección 8.2. Es decir, obtenemos $\mathbf{c} = (a, b, c)$ que minimiza la función

$$\delta_R(\mathbf{c}) = \sup_{\partial\Omega} g(x, \mathbf{c}) - \inf_{\partial\Omega} g(x, \mathbf{c}),$$

donde Ω es la región correspondiente con el país en cuestión y

$$g(x, \mathbf{c}) = -\log r(q) - \log\{\cos[c(\lambda - a)] + \cosh[c(q - b)]\}.$$

En g omitimos la constante aditiva $\log c$ pues no influye en el resultado.

Para minimizar $\delta_R(\mathbf{c})$ utilizamos `fminsearch`, función interna de MATLAB que exige valores iniciales (a_0, b_0, c_0) . Para ello nos basamos en la Sección 8.2: utilizamos la proyección de Lagrange-Lambert $p_E(x_0, \alpha)$ que resuelve el Problema de Chebyshev para Ω , es decir, tomamos

$$\begin{cases} a_0 = \lambda_0 \\ c_0^2 = \sin^2 \varphi_0 + (1 + \alpha) r_0^2 K_0 \\ b_0 = q_0 - 2 c_0^{-1} \operatorname{arc\,tgh}(c_0^{-1} \sin \varphi_0), \end{cases}$$

donde $x_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ es el centro y α el parámetro de forma de la elipse óptima de Chebyshev para Ω . Nuestro código `minChebyshev` permite obtener esta proyección; para ello solo se necesita los puntos de la frontera de Ω , no estamos sujetos a valores iniciales.

Para confrontar con los resultados de la Sección 8.2, los datos del contorno, $\partial\Omega$, se refieren, en el caso de España, al sistema ED50, elipsoide internacional; y utilizamos la base de datos `worldhi` de MATLAB en los casos de Suiza (esfera) y Portugal (elipsoide GRS80).

Proporcionamos las constantes $\mathbf{c} = (a, b, c)$ de la proyección p_R y el punto donde $g(x, \mathbf{c})$ alcanza el mínimo en Ω . Con este punto calculamos la distorsión absoluta $\delta = \sup_{\Omega} g - \inf_{\Omega} g$, donde $\sup_{\Omega} g = \sup_{\partial\Omega} g$, pues g es una función subarmónica.

España. Proyección de Lagrange-Lambert p_R :

$$a = -0.05977, \quad b = -1.1088, \quad c = 0.9243$$

Mínimo:

$$\lambda_0 = -3^\circ 25' 27.667'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 15' 19.922''$$

$$\lambda_0 = -0.05977, \quad q_0 = 0.7644$$

$$\text{Distorsión relativa: } \delta_R = 0.001499$$

$$\text{Distorsión absoluta: } \delta = 0.001874$$

Suiza. Proyección de Lagrange-Lambert p_R :

$$a = 0.1394, \quad b = -1.7282, \quad c = 0.8834$$

Mínimo:

$$\lambda_0 = 7^\circ 59' 9.785'', \quad \varphi_0 = 46^\circ 47' 12.321''$$

$$\lambda_0 = 0.1394, \quad q_0 = 0.9262$$

$$\text{Distorsión relativa: } \delta_R = 0.0001082$$

$$\text{Distorsión absoluta: } \delta = 0.0001234$$

Portugal. Proyección de Lagrange-Lambert p_R :

$$a = -0.1377, \quad b = -0.1897, \quad c = 1.2273$$

Mínimo:

$$\lambda_0 = -7^\circ 53' 29.769'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 27' 6.466''$$

$$\lambda_0 = -0.1377, \quad q_0 = 0.7689$$

$$\text{Distorsión relativa: } \delta_R = 0.0002312$$

$$\text{Distorsión absoluta: } \delta = 0.0002491$$

Distorsión absoluta

Según dijimos al comienzo de esta sección, la distorsión absoluta de una proyección conforme en una región Ω es

$$\delta(g, \Omega) = \sup_{\Omega} g - \inf_{\Omega} g,$$

con $g = \log \sigma$. Utilicemos ahora el criterio: *minimizar la distorsión absoluta*, para la optimización de una familia de proyecciones conformes. El Teorema 8.1 establece que la mejor proyección conforme para Ω (distorsión absoluta mínima) es tal que la función g es constante en la frontera de dicha región.

Sea \mathcal{F} la familia de proyecciones de Lagrange-Lambert. Para una región dada Ω queremos determinar la *proyección de Lagrange-Lambert óptima* p_A en el sentido de ser aquella con distorsión absoluta mínima en \mathcal{F} .

Hasta aquí hemos desarrollado dos formas de aproximarnos a p_A : considerar las proyecciones p_{ch} y p_R en \mathcal{F} con las siguientes propiedades:

- En aproximación cuadrática, p_{ch} es óptima porque minimiza el radio bisector de las elipses de Chebyshev que circunscriben a un país de pequeña o mediana extensión (Sección 8.2).
- p_R es óptima porque hace mínima la distorsión relativa que hemos definido como la amplitud de g en la frontera, $\delta_R = \sup_{\partial\Omega} g - \inf_{\partial\Omega} g$.

Ahora la cuestión es determinar p_A , es decir, obtener $\mathbf{c} = (a, b, c)$ de modo que

$$\delta(\mathbf{c}) = \sup_{x \in \Omega} g(x, \mathbf{c}) - \inf_{x \in \Omega} g(x, \mathbf{c})$$

sea mínima, donde

$$g(x, \mathbf{c}) = -\log r(q) - \log \{ \cos [c(\lambda - a)] + \cosh [c(q - b)] \}.$$

La función g asociada con cualquier proyección conforme es subarmónica, luego

$$\delta(\mathbf{c}) = \sup_{\partial\Omega} g(x, \mathbf{c}) - \inf_{\Omega} g(x, \mathbf{c}).$$

Minimizar $\delta(\mathbf{c})$ exige resolver dos problemas de mínimo: primero obtener $\inf_{\Omega} g$ y después hacer lo más pequeña posible la diferencia $\sup_{\partial\Omega} g - \inf_{\Omega} g$.

Ejemplos: España, Suiza y Portugal

Obtenemos la proyección de Lagrange-Lambert óptima p_A para los países analizados a lo largo de este capítulo. Para ello primero determinamos la proyección de Lagrange-Lambert p_R , problema resuelto anteriormente, que proporciona valores iniciales (a_0, b_0, c_0) , y utilizamos estos para minimizar $\delta(\mathbf{c})$ con `fminsearch`, función interna de MATLAB. En este proceso se debe hallar $\inf_{\Omega} g$; para ello aplicamos también `fminsearch` con valor inicial el punto donde la función g asociada con p_R alcanza el mínimo. A continuación se muestran los resultados.

España. Proyección de Lagrange-Lambert óptima:

$$a = -0.06121, \quad b = -1.1985, \quad c = 0.9072$$

Mínimo:

$$\lambda_0 = -3^\circ 30' 26.279'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 10' 38.815''$$

$$\lambda_0 = -0.06121, \quad q_0 = 0.7626$$

$$\text{Distorsión absoluta: } \delta = 0.001856$$

Suiza. Proyección de Lagrange-Lambert óptima:

$$a = 0.1394, \quad b = -1.7282, \quad c = 0.8834$$

Mínimo:

$$\lambda_0 = 7^\circ 59' 9.799'', \quad \varphi_0 = 46^\circ 47' 12.320''$$

$$\lambda_0 = 0.1394, \quad q_0 = 0.9262$$

$$\text{Distorsión absoluta: } \delta = 0.0001234$$

Portugal. Proyección de Lagrange-Lambert óptima:

$$a = -0.1372, \quad b = -0.1425, \quad c = 1.2553$$

Mínimo:

$$\lambda_0 = -7^\circ 51' 41.373'', \quad \varphi_0 = 40^\circ 4' 25.284''$$

$$\lambda_0 = -0.1372, \quad q_0 = 0.7603$$

$$\text{Distorsión absoluta: } \delta = 0.0002453$$

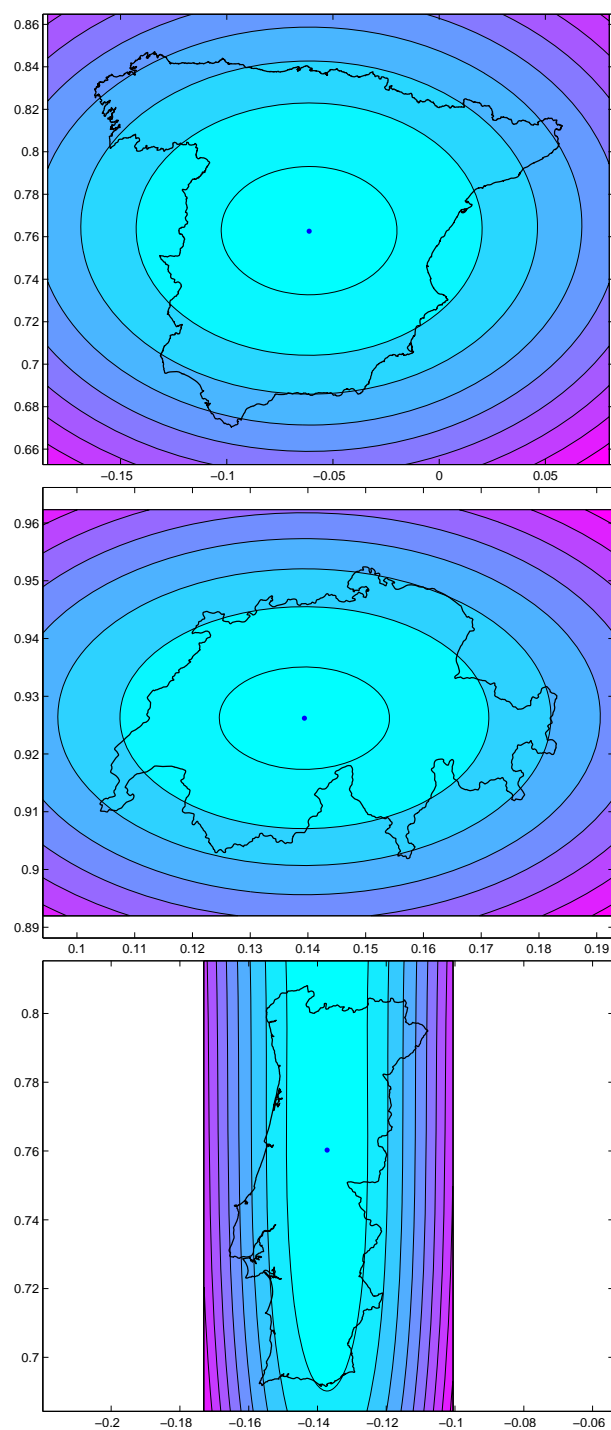


Fig. 8.16. Curvas de nivel del logaritmo de la escala infinitesimal asociada con la proyección de Lagrange-Lambert óptima para España, Suiza y Portugal. Los ejes están en coordenadas isométricas.

La función $g = \log \sigma$, asociada con cada una de las tres proyecciones de Lagrange-Lambert obtenidas, alcanza un mínimo en el punto expuesto en cada tabla. Se trata de un punto geodésico, marcado en la figura 8.16 junto con las curvas de nivel de g . En los casos de España y Suiza, el Teorema 7.6 permite concluir que el punto geodésico es único y además de tipo elíptico. En cambio, la proyección asociada con Portugal cumple las hipótesis del Teorema 7.7 con $1 < c < \sqrt{2(1 + e^2)}$,

$$t_{min} = 0.6548 \quad \text{y} \quad M(c) = 0.142603.$$

Además, se tiene que $b = -0.142485$, luego $|b| < M(c)$. Se concluye, en virtud de dicho teorema, que la proyección tiene tres puntos geodésicos: dos hiperbólicos, con $|\sin \varphi| > t_{min}$, y uno elíptico con $|\sin \varphi| < t_{min}$. Este último es el punto geodésico en cuestión porque $\sin(40^\circ 4' 25.284'') = 0.6438$, valor menor que t_{min} .

Resumen de resultados

Para cerrar este último capítulo de la Tesis agrupamos los resultados más importantes obtenidos a lo largo de él. Dada una región Ω , consideremos los siguientes elementos de la familia de proyecciones de Lagrange-Lambert:

- p_{ch} , que, en aproximación cuadrática, minimiza el radio bisector de las elipses de Chebyshev que circunscriben a Ω .
- p_R , que minimiza la distorsión relativa $\delta_R = \sup_{\partial\Omega} g - \inf_{\partial\Omega} g$.
- p_A , que minimiza la distorsión absoluta $\delta = \sup_{\Omega} g - \inf_{\Omega} g$.

La proyección p_{ch} tiene importancia por separado pues resuelve un problema geométrico, pero además proporciona valores iniciales para determinar p_R . Por otra parte, p_R simplifica el problema de minimizar la distorsión absoluta. Estas dos proyecciones permiten aproximarnos a p_A , véase la figura 8.17.

Las tablas siguientes muestran las constantes (a, b, c) , el punto (λ_0, φ_0) donde $g = \log \sigma$ alcanza el mínimo y las distorsiones relativa y absoluta de las proyecciones p_{ch} , p_R y p_A , cuando Ω corresponde con España peninsular, Suiza y Portugal.

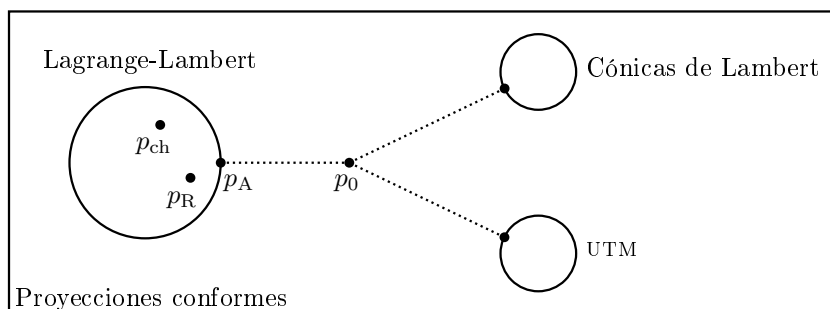


Fig. 8.17. Se representa p_0 , la mejor proyección conforme sobre una región Ω (distorsión absoluta mínima). En la familia de proyecciones de Lagrange-Lambert, p_A es quien minimiza la distorsión absoluta.

España

	p_{ch}	p_R	p_A
a	-0.06565	-0.05977	-0.06121
b	-1.3460	-1.1088	-1.1985
c	0.8831	0.9243	0.9072
λ_0	$-3^\circ 45' 42.13''$	$-3^\circ 25' 27.67''$	$-3^\circ 30' 26.28''$
φ_0	$40^\circ 13' 54.45''$	$40^\circ 15' 19.92''$	$40^\circ 10' 38.82''$
δ_R	0.001699	0.001499	0.001522
δ	0.001952	0.001874	0.001856

Suiza

	p_{ch}	p_R	p_A
a	0.1394	0.1394	0.1394
b	-1.7273	-1.7282	-1.7282
c	0.8835	0.8834	0.8834
λ_0	$7^\circ 59' 12.19''$	$7^\circ 59' 9.79''$	$7^\circ 59' 9.80''$
φ_0	$46^\circ 47' 42.20''$	$46^\circ 47' 12.32''$	$46^\circ 47' 12.32''$
δ_R	0.0001094	0.0001082	0.0001082
δ	0.0001251	0.0001234	0.0001234

Portugal			
	p_{ch}	p_R	p_A
a	-0.1368	-0.1377	-0.1372
b	-0.1346	-0.1897	-0.1425
c	1.2602	1.2273	1.2553
λ_0	$-7^\circ 50' 21.54''$	$-7^\circ 53' 29.77''$	$-7^\circ 51' 41.37''$
φ_0	$40^\circ 11' 36.56''$	$40^\circ 27' 6.47''$	$40^\circ 4' 25.28''$
δ_R	0.0002559	0.0002312	0.0002437
δ	0.0002520	0.0002491	0.0002453

Debe destacarse la contribución de S. A. Laplaza [1941] para España, expuesta al final de la Sección 8.2, quien obtuvo la proyección de Lagrange-Lambert:

$$a = -0.06141, \quad b = -1.2139, \quad c = 0.9044,$$

donde $\log \sigma$ alcanza el mínimo en $(\lambda_0, \varphi_0) = (-3^\circ 31' 7.431'', 40^\circ 9' 42.775'')$ y las distorsiones relativa y absoluta son

$$\delta_R = 0.001537 \quad \text{y} \quad \delta = 0.001866.$$

Su distorsión absoluta es menor que las de p_{ch} y p_R , y está muy próxima a la de p_A (valor óptimo), pues la diferencia con esta es del orden de 10^{-5} .

Por último, utilicemos la distorsión absoluta para comparar la de Lagrange-Lambert con otras familias de proyecciones conformes: las cónicas de Lambert y la UTM, por ejemplo, según muestra la figura 8.17.

En el caso de España, Bermejo y Otero [2005] han calculado la distorsión absoluta de la mejor proyección conforme para dicha región: $\delta_0 = 0.0007487$; también δ_l y δ_{utm} , distorsiones de la mejor cónica conforme de Lambert y de la UTM (huso 30) respectivamente. En las siguientes tablas y figura 8.18 presentamos δ_0 , δ_l y δ_{utm} junto con δ_{lag} , distorsión absoluta de la mejor proyección de Lagrange-Lambert.

Para Suiza y Portugal recogemos el valor de δ_0 calculado y expuesto en la Sección 8.1, y aplicamos el procedimiento que se explica en [Bermejo y Otero, 2005, §§ 4.2 y 4.3] para calcular δ_l y δ_{utm} . Para Suiza hemos considerado la proyección UTM (huso 32). Para optimizar el valor del meridiano central en el caso de Portugal hemos tomado la transversa de Mercator con meridiano central -8° , pues la UTM (huso 29) tiene su meridiano central, -9° , situado muy al oeste.

España ($\times 10^{-4}$)

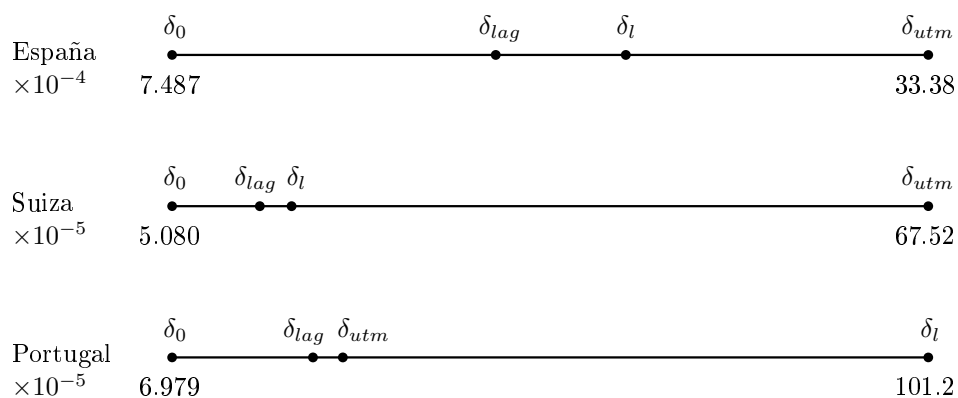
δ_0	δ_{lag}	δ_l	δ_{utm}
7.487	18.56	23.02	33.38

Suiza ($\times 10^{-5}$)

δ_0	δ_{lag}	δ_l	δ_{utm}
5.080	12.34	14.92	67.52

Portugal ($\times 10^{-5}$)

δ_0	δ_{lag}	δ_{utm}	δ_l
6.979	24.53	28.25	101.2

**Fig. 8.18.** Diagrama donde se muestra la posición de la distorsión absoluta de cada proyección óptima.

Conclusiones

Para finalizar resumimos las principales aportaciones de esta Tesis.

1. Hemos analizado y revisado las proyecciones de Lagrange con especial cuidado en las fuentes originales de los matemáticos que han contribuido a su desarrollo: Lambert, Lagrange, Bonnet, Chebyshev, Tissot, entre otros.

2. Introducimos en cartografía la función característica de una proyección conforme: $m = |f'(z)|^{-1}$, $z = \lambda + iq$, fundamentados en que las curvaturas de las imágenes de los meridianos y paralelos son: $\kappa_1 = -m_\lambda$ y $\kappa_2 = m_q$, respectivamente. Una proyección conforme es de Lagrange si y solo si su función característica satisface $m_{\lambda q} = 0$.

3. Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \Delta \log m = 0 \\ m_{\lambda q} = 0. \end{cases}$$

De este modo determinamos a priori la función característica de las proyecciones de Lagrange y también realizamos una primera clasificación en dos grupos:

$$\begin{array}{l} \text{Rectilíneas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cilíndricas conformes} \\ \text{Cónicas y acimutales conformes} \\ \text{Pseudopolares} \end{array} \right. \\ \\ \text{Circulares} \left\{ \begin{array}{l} \text{Unipolares} \\ \text{De Lagrange-Lambert} \\ \text{Apolares.} \end{array} \right. \end{array}$$

Las Pseudopolares, Unipolares y Apolares son nuevas en cartografía.

A partir de m establecemos la propiedad fundamental: $\kappa_2 X = \kappa_1 Y$, de dependencia entre las coordenadas (X, Y) de los puntos transformados según las proyecciones de Lagrange circulares y las curvaturas de las imágenes de meridianos y paralelos. Basados en esta propiedad, junto con las condiciones de Cauchy-Riemann, determinamos sus ecuaciones.

4. Introducimos, por primera vez en cartografía, dos operadores diferenciales asociados con una proyección conforme: la derivada pre-schwarziana, $P(f)$, y la derivada de Schwarz o schwarziana, $S(f)$.

Demostramos que el vector de curvaturas $\kappa_1 + i\kappa_2$ coincide con $mP(f)$ y que en las proyecciones de Lagrange circulares $P(f)$ y $f(z)$ son linealmente dependientes. Además obtenemos la siguiente relación de la schwarziana con las derivadas de las curvaturas para cualquier proyección conforme:

$$mS(f) = \frac{1}{2}[(\kappa_2)_q + (\kappa_1)_\lambda] - i(\kappa_1)_q,$$

5. Caracterizamos a las proyecciones de Lagrange mediante la ecuación $S(f) = \text{constante real}$. Resolvemos esta ecuación y clasificamos sus soluciones en tres clases que son transformaciones racionales lineales de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} z & \begin{cases} \text{Cilíndricas conformes} \\ \text{Unipolares} \end{cases} \\ e^{cz} & \begin{cases} \text{Pseudopolares} \\ \text{Apolares} \end{cases} \\ e^{icz} & \begin{cases} \text{Cónicas y acimutales conformes} \\ \text{De Lagrange-Lambert.} \end{cases} \end{aligned}$$

6. Estudiamos las propiedades geométricas y la utilidad en cartografía de las seis familias de proyecciones de Lagrange, e incluimos mapas de todas ellas creados por nosotros con el software Maple.

Demostramos que toda proyección conforme se puede aproximar en un punto mediante una proyección unipolar, $f(z) = (Az + B)/(Cz + D)$, en el sentido de coincidencia de $f(z)$ hasta la segunda derivada, y la schwarziana da una medida de la aproximación.

Nuestro propio análisis de las proyecciones de Lagrange-Lambert conduce a una formulación actual de la solución de Bonnet:

$$L(z) = k \operatorname{tg} \left[\frac{c}{2} (z - z_0) \right],$$

donde $k > 0$, $c > 0$ es el exponente de la proyección y z_0 el centro, que coincide con las ecuaciones que obtenemos al resolver la ecuación $m_{\lambda q} = 0$.

7. Introducimos en cartografía los puntos geodésicos de una proyección conforme, aquellos donde se anula la curvatura de las imágenes de todas las geodésicas que pasan por ellos, como puntos óptimos de la proyección. También los caracterizamos mediante $P(f)$. Expresamos la matriz hessiana

del logaritmo de la escala infinitesimal, $g = \log \sigma$, en un punto geodésico, en función de su latitud y de las partes real e imaginaria de $S(f)$.

8. Caracterizamos los puntos geodésicos $x = (\lambda, \varphi)$ de las proyecciones de Lagrange-Lambert mediante la ecuación $L(z) = ikc^{-1} \sin \varphi$, y hallamos su matriz hessiana:

$$Hg(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c^2 - \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & c_L^2 - c^2 \end{bmatrix},$$

donde $c_L^2(\varphi) = 1 + \cos^2 \varphi + 2e'^2 \cos^4 \varphi$ es el exponente de la proyección óptima de Lagrange para puntos del paralelo φ . Revisamos el problema de optimización local de Lagrange en un punto geodésico. Además demostramos que el número de puntos geodésicos, en el meridiano principal, es necesariamente: uno, dos o tres, y los clasificamos según el signo de $c_L^2 - c^2$:

si $c < c_L \Rightarrow$ elíptico, si $c = c_L \Rightarrow$ parabólico, si $c > c_L \Rightarrow$ hiperbólico.

9. Abordamos la cuestión de la optimización global, es decir, obtener la proyección de Lagrange-Lambert óptima para una región Ω del elipsoide, en el sentido de que su distorsión $\delta = \sup_{\Omega} g - \inf_{\Omega} g$ sea mínima.

Replanteamos y resolvemos el problema de Chebyshev: determinar la proyección de Lagrange-Lambert de distorsión mínima para un país, sujeta a la condición de que su frontera esté contenida en la clausura de la región limitada por una de las curvas de nivel de g . Presentamos el programa `minChebyshev` realizado con MATLAB, que resuelve este problema, y lo utilizamos para España, Suiza y Portugal. En el caso de España obtenemos una proyección de Lagrange-Lambert cuya distorsión es $\delta = 0.001952$, valor un 15 % menor que el de la mejor proyección cónica conforme de Lambert.

10. Introducimos el concepto de distorsión relativa de una proyección conforme, $\delta_R = \sup_{\Omega} (g - g_0) - \inf_{\Omega} (g - g_0)$. Aquí g_0 corresponde a la proyección conforme óptima para Ω , aquella que minimiza la distorsión δ . Demostramos que δ_R es igual a la amplitud de g en la frontera de Ω . Esto simplifica considerablemente el problema de minimizar la distorsión relativa y también su cálculo. Determinamos la proyección de Lagrange-Lambert que minimiza δ_R para los siguientes países:

España: $\delta = 0.001874$; Suiza: $\delta = 0.0001234$; Portugal: $\delta = 0.0002491$.

11. Finalmente, obtenemos la proyección de Lagrange-Lambert óptima (distorsión mínima) para los países ya citados:

España: $\delta = 0.001856$ $\left\{ \begin{array}{l} 19\% \text{ menor que la mejor cónica conforme,} \\ 44\% \text{ menor que UTM (huso 30).} \end{array} \right.$

Suiza: $\delta = 0.0001234$ $\left\{ \begin{array}{l} 17\% \text{ menor que la mejor cónica conforme,} \\ 82\% \text{ menor que UTM (huso 32).} \end{array} \right.$

Portugal: $\delta = 0.0002453$ $\left\{ \begin{array}{l} 13\% \text{ menor que UTM meridiano central } -8^\circ, \\ 76\% \text{ menor que la mejor cónica conforme.} \end{array} \right.$

Concluimos que, al menos en estos casos, se debe elegir la proyección de Lagrange-Lambert frente a otras proyecciones conocidas. Además, estas distorsiones son prácticamente iguales a las obtenidas al minimizar δ_R , problema más sencillo de resolver que el de minimizar δ .

Líneas de investigación

Entre las cuestiones de interés que el trabajo desarrollado en esta Tesis sugiere, algunas ya en desarrollo, destacamos las siguientes.

- Análisis y utilidad en cartografía de la familia de proyecciones conformes asociada con $f(z) = \operatorname{tg}(az)$, con a constante compleja.
- Obtención y análisis de las proyecciones conformes que transforman los meridianos en arcos de elipse y los polos terrestres en puntos finitos y distintos.
- Caracterización de la imagen de las loxodromas y de la imagen de las geodésicas en las proyecciones de Lagrange-Lambert.

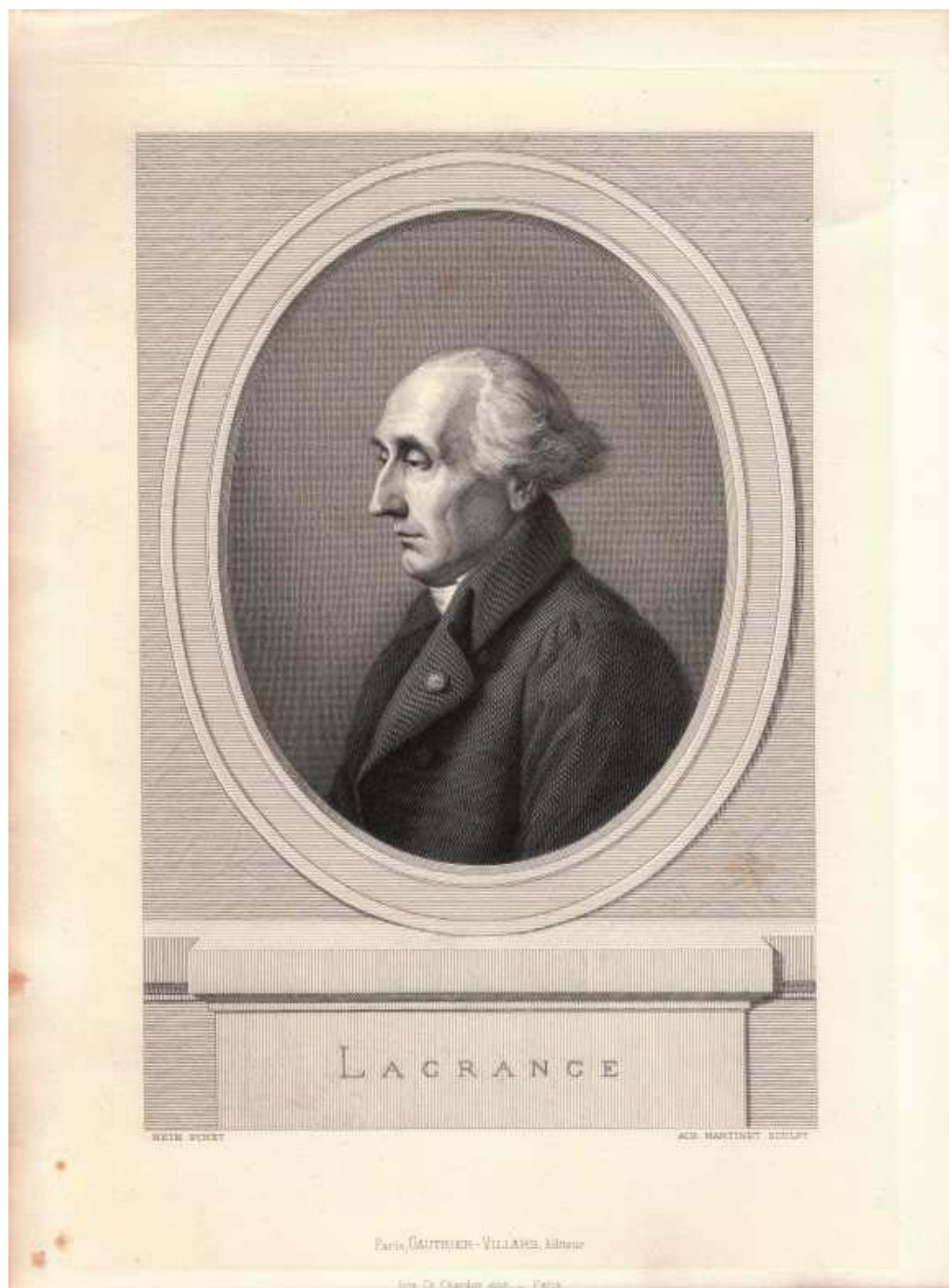
Apéndice A

Traducción de las dos Memorias de Lagrange

Cierra esta Tesis la traducción del trabajo de J. L. Lagrange que constituye una célebre página de la cartografía: *Sur la construction des cartes géographiques*. Está dividido en dos memorias que fueron publicadas en 1781 en las *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, année 1779*, páginas 161-210. De este trabajo, escrito en francés, existe traducción al alemán [Wangerin, 1894] pero no nos consta que exista traducción a otro idioma.

La primera Memoria (páginas 161-185) contiene una introducción y las Secciones 1-20. La segunda Memoria (páginas 186-210) está formada por una introducción y las Secciones 21-42, y además contiene dos figuras.

He conservado la notación y el estilo de los párrafos y ecuaciones de la edición de las obras completas: *Œuvres de Lagrange*, cuyo cuarto volumen, publicado en 1869, recoge el trabajo en cuestión, páginas 637-692. Las dos figuras que aparecen en esta traducción son facsímiles de las originales. No traduzco los títulos de las obras a las que Lagrange hace referencia y mantengo la inicial mayúscula de las palabras que así se muestran: *Cartes*, *Astronomie*, *Géographie*, por ejemplo. Detrás de esta hoja reproducimos el frontispicio de Lagrange que aparece en el cuarto volumen de sus obras, y en la siguiente la primera página de su trabajo en la fuente original.



DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES. 161

SUR LA CONSTRUCTION
des Cartes Géographiques.

PAR M. DE LA GRANGE.

PREMIER MÉMOIRE.

Une carte géographique n'est autre chose qu'une figure plane qui représente la surface de la Terre, ou une de ses parties. Cette représentation n'auroit aucune difficulté si la Terre étoit plate, ou si elle étoit un solide quelconque terminé par des surfaces planes; il en seroit de même si la Terre avoit une figure courbe telle qu'elle pût se développer sur un plan, ce qui a lieu à l'égard des cônes, & d'une infinité d'autres surfaces courbes. Mais la Terre étant sphérique, ou plutôt sphéroïdique, il est impossible de représenter sur un plan une partie quelconque de sa surface sans altérer les positions & les distances respectives des différens lieux; & la plus grande perfection d'une carte géographique doit consister dans la moindre altération de ces distances.

Dans l'impossibilité de construire des cartes géographiques qui soient la représentation exacte des différens lieux de la Terre, les Géographes ont pensé à former des especes de tableaux, où les mêmes lieux soient placés suivant les regles de la Perspective; c'est ce qui a donné naissance aux différentes especes de projections géographiques, lesquelles ne different que dans la position de l'œil & dans celle du plan de projection par rapport à la surface du globe terrestre.

Comme la situation des différens lieux de la Terre se détermine par les cercles de longitude & de latitude qui passent par ces lieux, toute la difficulté consiste dans la projection de ces cercles, & il est facile de concevoir que la projection d'un cercle quelconque du globe ne peut être qu'une

SUR LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES

Joseph Louis Lagrange

*(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1779.)*

Primera memoria

Un Mapa no es más que una figura plana que representa la superficie de la Tierra o una de sus partes. Esa representación no tendría ninguna dificultad si la Tierra fuera plana, o si fuera un sólido cualquiera limitado por superficies planas; lo mismo ocurriría si la Tierra tuviera una forma curva tal que pudiera desarrollarse en un plano, como tiene lugar en conos y una infinidad de otras superficies curvas. Pero siendo esférica la Tierra, o mejor dicho un esferoide, es imposible representar en un plano una parte cualquiera de su superficie sin alterar las posiciones y las distancias respectivas de diferentes lugares; y la mayor perfección de un Mapa debe consistir en la menor alteración de esas distancias.

De acuerdo con la imposibilidad de construir Mapas que sean la representación exacta de diferentes lugares de la Tierra, los Geógrafos han pensado en construir algunas clases de dibujos, donde los mismos lugares se coloquen según las reglas de la Perspectiva; esto es lo que ha dado origen a las diferentes clases de proyecciones geográficas, las cuales no se diferencian más que en la posición del ojo y en la del plano de proyección con respecto a la superficie del globo terrestre.

Como la posición de diferentes lugares de la Tierra se determina por las circunferencias de longitud y de latitud que pasan por esos lugares, toda la dificultad reside en la proyección de esas circunferencias, y es fácil concebir que la proyección de una circunferencia cualquiera del globo no puede ser más que una sección cónica, formada por la intersección del plano de proyección con el cono que tendrá esta misma circunferencia por base, y cuyo vértice estará en el lugar del ojo.

Si el ojo está en el centro del globo, la proyección se llama *central* y tiene la propiedad de que todas las circunferencias máximas se encuentran representadas por rectas; pero las circunferencias pequeñas lo están por circunferencias o por elipses, según que su plano sea paralelo o no al plano de proyección. Algunas veces se utiliza esta proyección para los Mapamundis, y ahí se supone comúnmente que el plano de proyección es paralelo al ecuador,

gracias a lo cual todas las circunferencias de latitud se convierten también en circunferencias en el Mapamundi; pero casi no se emplea para los Mapas particulares que no representan más que una parte de la superficie de la Tierra; lo es más para los Mapas celestes, y es, en general, a esta proyección que se reduce toda la Gnomónica, las líneas horarias de un cuadrante cualquiera no son más que las proyecciones centrales de las circunferencias horarias de la esfera.

Por lo demás algunos Mapas contruidos según esa proyección tendrían la gran ventaja de que todos los puntos de la Tierra que están situados en una misma circunferencia máxima del globo se encontrarían ubicados en rectas en el Mapa; de modo que, para obtener el camino más corto de un lugar de la Tierra a otro, no habría más que unir aquellos dos lugares en el Mapa con una recta.

Al colocar el ojo en la superficie del globo, y al tomar el plano de proyección perpendicular al rayo visual dirigido desde el ojo al centro, se obtiene la proyección conocida con el nombre de *proyección estereográfica*, ideada primero por Ptolomeo para la construcción de astrolabios o planisferios celestes, y adoptada después por la mayoría de los Geógrafos modernos para la construcción de Mapas terrestres. La principal propiedad de esta proyección es que todas las circunferencias del globo se representan igualmente por circunferencias; de modo que basta determinar la proyección de tres puntos cualesquiera de un meridiano o de un paralelo para poder trazar la proyección entera de la circunferencia. En diferentes Tratados de Geografía se encuentran reglas para trazar los meridianos y los paralelos, cualquiera que sea la posición del ojo en la superficie del globo. También se puede ver sobre este tema una Memoria del Sr. Kæstner en la Colección de sus *Dissertations physiques et mathématiques*.

Esa bella propiedad de la proyección estereográfica fue descubierta por Ptolomeo y expuesta en su Tratado titulado *Sphæræ a planetis projectio in planum*, Obra que solo nos ha llegado en árabe y de la que Comandino hizo en 1558 una edición latina con Comentarios. Ella depende, en general, de que la sección del cono visual es siempre antiparalela a la base, de modo que, siendo esta una circunferencia, la sección o proyección de esta circunferencia debe ser una también.

Pero la misma proyección estereográfica tiene todavía otra propiedad muy notable, que no parece haber sido advertida por Ptolomeo; esta es la de que las circunferencias de la proyección se cortan según los mismos ángulos que las circunferencias del globo, de modo que todos los ángulos formados en la superficie del globo son iguales en la proyección; de donde resulta que una porción cualquiera infinitamente pequeña de esa superficie conserva la misma forma en la proyección y no se altera más que en el tamaño. Veremos

en la continuación de esta Memoria que esa propiedad no es particular de la proyección estereográfica, sino que también tiene lugar en las Cartas marinas reducidas, y en una infinidad de otras clases de Mapas que se podrían construir.

Por último, si se supone el ojo a una distancia infinita del globo, de modo que todos los rayos visuales sean rectas paralelas entre ellas, y se toma el plano de proyección perpendicular a esos rayos, se obtiene la *proyección ortográfica*, en la cual las circunferencias del globo son rectas, o circunferencias, o elipses, según que su plano sea paralelo, o perpendicular, u oblicuo a los rayos visuales. Esta clase de proyección casi no se emplea en Geografía, pero lo es mucho en Astronomía para el cálculo de los eclipses, y en Gnomónica para la construcción de los cuadrantes analemáticos.

Tales son las principales clases de proyecciones, y es obvio que se puede imaginar una infinidad de otras dando diferentes posiciones al ojo y al plano de proyección. Pero todas estas proyecciones tienen el defecto de alterar más o menos el tamaño y la forma de los diversos países que se representan; y el Sr. De la Hire ha encontrado que esa alteración sería la mínima en algunos aspectos, si se situara el ojo fuera del globo a una distancia de su superficie igual al seno de la octava parte de una circunferencia máxima (véase las *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* de 1701); pero esta ventaja no ha parecido quizá suficiente a la mayoría de los Geógrafos para que adopten una proyección que tiene al mismo tiempo el inconveniente de representar la mayor parte de las circunferencias del globo con elipses.

La idea de trazar los Mapas como proyecciones de la superficie del globo en un plano es muy sencilla y muy natural; pero nada obliga a seguirla sin excepción. También varios sabios Geógrafos se apartaron, y emplearon diferentes formas de representar las circunferencias de las longitudes y de las latitudes terrestres, ya sea con rectas o con circunferencias, o incluso con líneas mecánicas. En efecto, se pueden mirar los Mapas desde un punto de vista más general y como representaciones cualesquiera de la superficie del globo; en tal caso no hay más que trazar los meridianos y los paralelos según una ley cualquiera dada, y situar los diversos lugares respecto a esas líneas como lo están en la superficie de la Tierra respecto a las circunferencias de longitud y de latitud. De este modo la construcción de un Mapa se convierte en un Problema completamente indeterminado; pero se puede determinar sometiéndolo a ciertas condiciones dadas, independientes de la consideración de las proyecciones. Se tiene un ejemplo en las Cartas marinas reducidas o por latitudes crecientes, en cuya invención no hubo otro fin más que el de procurar que los diferentes rumbos de viento se representen por rectas que formen entre ellas los mismos ángulos que aquellos rumbos forman en la rosa de la brújula; esta condición exige en primer lugar que todos los meridianos

sean rectas paralelas, y que todos los paralelos al ecuador sean igualmente rectas que crucen a los meridianos en ángulos rectos; y en segundo lugar que los grados de latitud y de longitud en el Mapa conserven entre ellos las mismas proporciones que aquellos grados tienen en la superficie del globo; de modo que, como los grados de longitud se suponen constantes en el Mapa y que en el globo son los grados de latitud los que son constantes, es necesario que en el Mapa los grados de latitud crezcan en la misma razón que los de longitud decrecen en el globo, es decir en razón inversa al coseno de la latitud, o, lo que es lo mismo, en razón directa a la secante de la latitud; de donde se concluye además por el Cálculo integral que la distancia entre el ecuador y un paralelo cualquiera debe ser proporcional al logaritmo de la tangente del semi-complemento de la latitud de este paralelo; lo cual es el fundamento conocido de la construcción de las Cartas reducidas.

El difunto Sr. Lambert fue el primero que consideró la Teoría de los Mapas desde el punto de vista general que voy a exponer, y en consecuencia el que tuvo la idea de determinar las líneas de los meridianos y de los paralelos según la única condición de que todos los ángulos formados en el Mapa sean iguales a los ángulos correspondientes en la superficie del globo. Este Problema, del que se encuentra una solución general en el tercer Volumen de los *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik*, etc., después fue resuelto también por el Sr. Euler en el Volumen que acaba de publicarse de las *Actes de l'Académie de Pétersbourg* del año 1777; pero estos dos ilustres Autores a continuación se contentaron con hacer ver que las Teorías conocidas de la proyección estereográfica y de las Cartas reducidas están contenidas en esa solución, y nadie se ha encargado todavía de dar a estas Teorías toda la extensión de la que son susceptibles, determinando todos los casos en los que la solución en cuestión puede dar circunferencias para los meridianos y los paralelos.

Esta investigación, interesante igualmente por los artificios analíticos que requiere y por la utilidad que puede tener para la perfección de los Mapas, me parece digna de la atención de los Geómetras y propia para proporcionar la materia de una Memoria. En primer lugar resolveré el mismo Problema según un método distinto del de los Sres. Lambert y Euler, y, si no me equivoco, más sencillo y más general en algunos aspectos; a continuación aplicaré la solución general en el caso particular en que se supone que los meridianos y los paralelos son circunferencias, que son las únicas curvas que se pueden emplear fácilmente en la construcción de los Mapas; y además resolveré algunas otras cuestiones relativas a este objeto y de donde resultan varias consecuencias útiles.

1. Supongo primero, para mayor generalidad, que la Tierra es un esferoide cualquiera engendrado por la revolución de una curva dada alrededor de un

eje fijo; esta curva será la de todos los meridianos de la Tierra, y su eje será al mismo tiempo el eje de la Tierra. Refiero la misma curva a su eje por medio de dos coordenadas rectangulares p y q , de las cuales p es la abscisa tomada en el eje desde el polo de la Tierra, y q es la ordenada perpendicular al eje. Además llamo s al arco correspondiente, es decir, al arco de un meridiano contado desde el polo, y t al ángulo que el plano de este meridiano forma con el primer meridiano cuya posición es arbitraria. Es obvio que la posición de un lugar cualquiera en la superficie de la Tierra estará determinada por el arco s del meridiano, que pasa por ese lugar, y por el ángulo t de este meridiano con el primer meridiano; se ve al mismo tiempo que en el caso de la Tierra esférica el arco s será (tomando el radio de la Tierra como unidad) la distancia al polo, o el complemento de la latitud del lugar, y el ángulo t la longitud de ese mismo lugar; y se tendrá en ese caso

$$p = \cos s \quad y \quad q = \sin s.$$

En general, cualquiera que sea la forma de la Tierra, con tal que sea un esferoide, el ángulo t siempre será igual a la longitud, y el arco s del meridiano será una función dada de la latitud.

Formulado esto, imaginamos que el mismo lugar se coloca en el Mapa de modo que su posición se determine por dos coordenadas rectangulares x e y , siendo x la abscisa tomada en un eje cualquiera, e y la ordenada perpendicular a este eje; es claro que estas dos cantidades x e y deben depender de las cantidades s y t , es decir ser funciones de estas dos últimas cantidades; y es obvio que, si en esas funciones se hace constante la variable t , se obtendrán las coordenadas de la curva que representa al meridiano cuya longitud es t ; al contrario, si se hace s constante, se obtendrán las coordenadas de la curva que representa al paralelo al que corresponde el arco de meridiano s .

2. Consideremos ahora dos lugares infinitamente próximos que estén determinados en la superficie de la Tierra por las variables s y t , y $s + ds$ y $t + dt$, y en el Mapa por las variables correspondientes x e y , y $x + dx$ e $y + dy$; y busquemos las distancias de esos dos lugares en la superficie de la Tierra y en el Mapa. Es evidente que la primera de esas distancias se expresará como $\sqrt{ds^2 + q^2 dt^2}$, puesto que ds es la diferencia de los dos arcos de meridiano que pasan por los dos lugares, y qdt es el arco de paralelo comprendido entre esos dos meridianos; y que la segunda lo estará por la fórmula ordinaria $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, pues x e y son coordenadas rectilíneas y rectangulares.

Ahora bien un Mapa perfecto sería aquel en que esas distancias fuesen iguales, pues en tal caso todas las demás distancias pequeñas y grandes serían también las mismas en la superficie de la Tierra que en el Mapa; pero, para dar a nuestras investigaciones toda la generalidad posible, supondremos que

esas distancias están entre ellas en una proporción cualquiera expresada por $1 : m$, de modo que se tenga

$$\sqrt{ds^2 + q^2 dt^2} : \sqrt{dx^2 + dy^2} = 1 : m,$$

de donde se obtiene la ecuación fundamental

$$dx^2 + dy^2 = m^2 (ds^2 + q^2 dt^2),$$

que ahora se tratará de resolver.

3. A tal efecto, observo primero que la ordenada q de la curva de los meridianos es una función del arco s dada por la naturaleza de la curva; de modo que ds/q será una cantidad integrable, o al menos puede ser supuesta como tal, ya que no contiene más que una variable. Haciendo pues

$$\frac{ds}{q} = du \quad \text{y} \quad mq = n,$$

la ecuación propuesta se convierte en esta:

$$dx^2 + dy^2 = n^2 (du^2 + dt^2),$$

en la cual t y u son dos variables independientes una de la otra, y n es una cantidad hasta aquí indeterminada. Y la cuestión se reduce a determinar por medio de esta ecuación los valores de x e y en función de t y u .

Como la ecuación en cuestión contiene dos incógnitas dx y dy , para la resolución del modo más general y más sencillo, tomo un ángulo indeterminado ω , y la multiplico por esta:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \omega + \operatorname{cos}^2 \omega,$$

observando que el producto de los dos cuadrados $\operatorname{sen}^2 \omega + \operatorname{cos}^2 \omega$ por los dos cuadrados $du^2 + dt^2$ se puede poner en forma de dos cuadrados de esta manera:

$$(\operatorname{sen} \omega \, du - \operatorname{cos} \omega \, dt)^2 + (\operatorname{cos} \omega \, du + \operatorname{sen} \omega \, dt)^2;$$

obtendré pues así la transformada

$$dx^2 + dy^2 = n^2 (\operatorname{sen} \omega \, du - \operatorname{cos} \omega \, dt)^2 + n^2 (\operatorname{cos} \omega \, du + \operatorname{sen} \omega \, dt)^2,$$

que a causa de la indeterminada ω puede dividirse en estas dos:

$$dx = n (\operatorname{sen} \omega \, du - \operatorname{cos} \omega \, dt)$$

y

$$dy = n (\operatorname{cos} \omega \, du + \operatorname{sen} \omega \, dt).$$

Y no quedará más que procurar que estos valores de dx y dy sean diferenciales completos; lo que es posible con la ayuda de las dos indeterminadas n y ω .

En efecto, si se hace para abreviar

$$n \operatorname{sen} \omega = \alpha \quad \text{y} \quad n \cos \omega = \beta,$$

se obtendrán estas dos fórmulas:

$$dx = \alpha du - \beta dt \quad \text{y} \quad dy = \beta du + \alpha dt,$$

que deben ser integrables y a las que se puede aplicar el método conocido del Sr. D'Alembert.

Según ese método, se multiplica la segunda por $\sqrt{-1}$, después se suma a la primera, y se resta, lo que dará estas dos:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(du + dt\sqrt{-1})$$

y

$$dx - dy\sqrt{-1} = (\alpha - \beta\sqrt{-1})(du - dt\sqrt{-1}),$$

que como deben ser asimismo integrables, resulta que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ no puede ser sino una función de $u + t\sqrt{-1}$, y $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ una función de $u - t\sqrt{-1}$; y estas dos funciones al ser integradas darán los valores de $x + y\sqrt{-1}$ y $x - y\sqrt{-1}$, de donde se obtendrán x e y .

Denotemos, en general, por las características f y F dos funciones indeterminadas cualesquiera, de modo que $f(z)$ y $F(z)$ sean dos funciones cualesquiera de z ; denotemos además por $f'(z)$ y $F'(z)$ los diferenciales de esas funciones, de modo que

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{y} \quad F'(z) = \frac{dF(z)}{dz};$$

se hará:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = f'(u + t\sqrt{-1})$$

y

$$\alpha - \beta\sqrt{-1} = F'(u - t\sqrt{-1}),$$

y se tendrá:

$$x + y\sqrt{-1} = f(u + t\sqrt{-1})$$

y

$$x - y\sqrt{-1} = F(u - t\sqrt{-1});$$

de donde se obtiene:

$$x = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) + F(u - t\sqrt{-1})}{2}$$

e

$$y = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) - F(u - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

las funciones designadas por f y F siguen siendo arbitrarias.

4. Tales son las expresiones más generales de las coordenadas x e y que determinan en el Mapa la posición que debe tener cada lugar de la Tierra, en virtud de la condición supuesta, que la distancia de dos lugares cualesquiera infinitamente próximos en la superficie de la Tierra sea a la distancia de los mismos lugares en el Mapa en la proporción 1 a m (2). Ahora bien, habiendo supuesto (3)

$$mq = n$$

y además

$$n \sin \omega = \alpha \quad \text{y} \quad n \cos \omega = \beta,$$

se tendrá

$$n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

y por consiguiente

$$m = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{q};$$

pero

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = f'(u + t\sqrt{-1}) F'(u - t\sqrt{-1});$$

luego se obtendrá

$$m = \frac{\sqrt{f'(u + t\sqrt{-1}) F'(u - t\sqrt{-1})}}{q}.$$

Se ve en esta fórmula que el valor de m es una función de las variables finitas t y u , es decir de t y s , debido a que u es una función de s . De donde resulta que la distancia de dos lugares cualesquiera de la Tierra infinitamente próximos entre ellos, de los que uno responde a t y s y el otro a $t + dt$ y $s + ds$, será a la distancia de los mismos lugares colocados en el Mapa en una proporción dependiente únicamente de t y s ; por consiguiente todos los lugares de la Tierra situados alrededor de un lugar dado, a distancias infinitamente pequeñas de ese lugar, se encontrarán colocados en el Mapa de modo que formarán una figura semejante a la que forman en la superficie de

la Tierra, estando los lados homólogos de esas dos figuras en la proporción 1 a m , y la superficie de las mismas figuras en la proporción 1 a m^2 . Así un Mapa construido según las expresiones de x e y , que acabamos de hallar, tendrá la misma propiedad que ya hemos observado ser común a los Mapas estereográficos y a las Cartas reducidas, y que consiste en que cada parte infinitamente pequeña de la superficie de la Tierra conserva su forma en el Mapa y no se altera más que en su tamaño. Y es fácil convencerse por nuestro análisis de que las expresiones en cuestión encierran necesariamente la ley que describe todos los Mapas en los que puede tener lugar la misma condición.

5. Para determinar ahora las funciones desconocidas que intervienen en las expresiones de x e y , observo que si en esas expresiones se supone $t = 0$, se obtienen los valores de las coordenadas de la curva que representa al primer meridiano. Esos valores serán pues

$$x = \frac{f(u) + F(u)}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{f(u) - F(u)}{2\sqrt{-1}},$$

los cuales, debido a las dos funciones arbitrarias $f(u)$ y $F(u)$, pueden ser, como se ve, funciones cualesquiera de u . Así se puede suponer que el primer meridiano del Mapa es una curva cualquiera, y que además los cambios de latitud en ese meridiano siguen también una ley cualquiera.

En efecto supongamos que para ese meridiano se tuviera

$$x = \varphi(u) \quad \text{e} \quad y = \Phi(u),$$

representando $\varphi(u)$ y $\Phi(u)$ funciones cualesquiera dadas de u ; se tendrá pues

$$\frac{f(u) + F(u)}{2} = \varphi(u) \quad \text{y} \quad \frac{f(u) - F(u)}{2\sqrt{-1}} = \Phi(u);$$

de donde se obtiene

$$f(u) = \varphi(u) + \Phi(u)\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad F(u) = \varphi(u) - \Phi(u)\sqrt{-1}.$$

Luego, introduciendo esta forma de función en las expresiones generales de x e y , se obtendrá:

$$x = \frac{\varphi(u + t\sqrt{-1}) + \varphi(u - t\sqrt{-1})}{2} + \frac{\Phi(u + t\sqrt{-1}) - \Phi(u - t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1}$$

e

$$y = \frac{\Phi(u + t\sqrt{-1}) + \Phi(u - t\sqrt{-1})}{2} + \frac{\varphi(u + t\sqrt{-1}) - \varphi(u - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

y estas expresiones tienen la ventaja de que las partes imaginarias se cancelan siempre consigo mismas.

6. Pero este modo de determinar las funciones arbitrarias, aunque el más natural y el más sencillo, no es sin embargo el que más conviene a nuestro objeto. En efecto, lo oportuno no es fijar la posición de los lugares que deben colocarse en el primer meridiano, sino la forma misma de los meridianos y de los paralelos, porque son las líneas que hay que trazar en el Mapa para poder situar después los diferentes lugares de la Tierra. Así la cuestión se reduce a determinar la forma de las funciones desconocidas de la solución general de modo que de ello resulten líneas de una naturaleza dada para los meridianos y para los paralelos. Esta cuestión aún no ha sido resuelta y es en sí misma muy difícil, quizá incluso imposible de resolver en general; pero para las necesidades de la Geografía basta resolverla en el caso particular en que los meridianos y los paralelos deben ser arcos de circunferencia, lo que comprende a la vez los dos casos de la proyección estereográfica y de las Cartas reducidas; pues es natural que en la construcción de los Mapas se prefiera siempre la circunferencia a todas las demás curvas, debido a la facilidad y exactitud con que se puede trazar mediante el compás.

7. Como la principal propiedad de la circunferencia consiste en que el radio de su curvatura es constante, primero vamos a buscar en general la expresión de los radios osculadores de las curvas que deben representar los meridianos y los paralelos según las fórmulas generales del n.º 3. Ahora bien se sabe que la expresión del radio osculador en las curvas referidas a las coordenadas rectangulares x e y es

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy d^2x - dx d^2y};$$

y es fácil ver por la naturaleza de nuestras fórmulas que en los meridianos habrá que hacer variar únicamente s o u en las expresiones de x e y , y que en los paralelos habrá que hacer variar únicamente t ; pero se tiene en general (apartado citado):

$$dx = \alpha du - \beta dt \quad \text{y} \quad dy = \beta du + \alpha dt;$$

luego en los meridianos se tendrá:

$$dx = \alpha du, \quad dy = \beta du, \quad d^2x = \frac{d\alpha}{du} du^2 \quad \text{y} \quad d^2y = \frac{d\beta}{du} du^2;$$

por consiguiente, si se llama r al radio osculador de un meridiano cualquiera, se obtendrá

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta \frac{d\alpha}{du} - \alpha \frac{d\beta}{du}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En los paralelos se tendrá:

$$dx = -\beta dt, \quad dy = \alpha dt, \quad d^2x = -\frac{d\beta}{dt} dt^2 \quad \text{y} \quad d^2y = \frac{d\alpha}{dt} dt^2;$$

luego, llamando ρ al radio osculador de un paralelo cualquiera, se obtendrá

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\beta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Observo ahora que, por la condición de integrabilidad de la fórmulas

$$\alpha du - \beta dt \quad \text{y} \quad \beta du + \alpha dt,$$

se tiene

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\beta}{du} \quad \text{y} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{du};$$

luego las expresiones precedentes de $1/r$ y de $1/\rho$ pueden transformarse en estas:

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{\beta \frac{d\beta}{du} + \alpha \frac{d\alpha}{du}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a saber:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{du}.$$

Ahora bien hemos hallado más arriba (4) que

$$\alpha^2 + \beta^2 = f'(u + t\sqrt{-1}) F'(u - t\sqrt{-1});$$

luego, sustituyendo este valor y haciendo para mayor sencillez

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{f'(u + t\sqrt{-1}) F'(u - t\sqrt{-1})}},$$

se obtendrán estas expresiones muy sencillas:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\Omega}{du}.$$

8. Esa cantidad Ω sirve también para determinar el valor de m ; pues es obvio que se tendrá (4)

$$m = \frac{1}{q\Omega}.$$

Ahora bien, como q es una función del arco s del meridiano dada por la forma de ese meridiano y

$$du = \frac{ds}{q},$$

resulta que también se puede ver q como una función de u .

Luego, si se quisiera que la cantidad m fuera constante o que fuera una función cualquiera solo de u , es decir, que se mantuviera igual en todos los puntos de un mismo paralelo, sería necesario que Ω fuera una función solo de u sin t ; por consiguiente sería necesario que $d\Omega/dt = 0$; luego se tendría, por el apartado precedente, $1/r = 0$, a saber $r = \infty$; por consiguiente sería preciso que todos los meridianos del Mapa fuesen rectas. Pero veremos más abajo que la condición $\Omega = 1/(mq)$, en la hipótesis m función solo de u , requeriría que la Tierra tuviera una forma dada.

9. Supongamos ahora, en general, que todos los meridianos del Mapa son circunferencias cualesquiera, lo que encierra también el caso precedente donde los meridianos eran rectas. Será necesario pues que el valor de r sea constante en cada meridiano y no varíe sino de un meridiano a otro; luego r y por consiguiente $d\Omega/dt$ no podrá ser más que una función solo de t ; luego la diferencia de $d\Omega/dt$, al hacer variar solo u , deberá ser nula; así la condición para que todos los meridianos sean circunferencias será

$$\frac{d^2\Omega}{dt du} = 0.$$

Si se multiplica esta ecuación por dt y se integra haciendo variar solo t , se obtendrá

$$\frac{d\Omega}{du} = U,$$

siendo U una función cualquiera de u sin t ; luego se tendrá

$$\frac{1}{\rho} = U;$$

lo que hace ver que los paralelos son también circunferencias, ya que siendo su radio osculador una función solo de u debe mantenerse igual en toda la extensión de cada paralelo. Se probaría del mismo modo que suponiendo los paralelos circulares los meridianos también lo serían. Y la condición común a la circularidad de unos y otros será $d^2\Omega/dtdu = 0$. Veamos pues cuál debe ser la forma de las funciones f y F para que se cumpla esta condición.

10. Para facilitar esa búsqueda, primero tomo otras dos funciones que denoto por las características φ y Φ , y que supongo tales que

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \quad \text{y} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{F'(z)}};$$

es obvio que se tendrá de este modo

$$\Omega = \varphi(u + t\sqrt{-1}) \Phi(u - t\sqrt{-1});$$

diferencio ahora esta cantidad dos veces seguidas, haciendo variar primero u y después t ; obtendré así (denotando por φ' y φ'' , y por Φ' y Φ'' las diferencias de las funciones φ y Φ , de modo que $\varphi'(z) = d\varphi(z)/dz$, $\varphi''(z) = d^2\varphi(z)/dz^2$, $\Phi'(z) = d\Phi(z)/dz$ y $\Phi''(z) = d^2\Phi(z)/dz^2$):

$$\frac{d\Omega}{du} = \varphi'(u + t\sqrt{-1}) \Phi(u - t\sqrt{-1}) + \Phi'(u - t\sqrt{-1}) \varphi(u + t\sqrt{-1})$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dudt} = & \left[\varphi''(u + t\sqrt{-1}) \Phi(u - t\sqrt{-1}) - \varphi'(u + t\sqrt{-1}) \Phi'(u - t\sqrt{-1}) \right. \\ & \left. - \Phi''(u - t\sqrt{-1}) \varphi(u + t\sqrt{-1}) + \Phi'(u - t\sqrt{-1}) \varphi'(u + t\sqrt{-1}) \right] \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

luego la condición $d^2\Omega/dudt = 0$ dará esta ecuación:

$$\varphi''(u + t\sqrt{-1}) \Phi(u - t\sqrt{-1}) - \Phi''(u - t\sqrt{-1}) \varphi(u + t\sqrt{-1}) = 0;$$

por consiguiente se tendrá

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = \frac{\Phi''(u - t\sqrt{-1})}{\Phi(u - t\sqrt{-1})};$$

estas cantidades no solo han de ser iguales, sino idénticas, es decir, deben ser la misma cantidad independientemente de cualquier ecuación entre u y t ; luego, como una es función de $u + t\sqrt{-1}$ y la otra es función de $u - t\sqrt{-1}$, resulta que no pueden llegar a ser idénticas a menos que sean iguales a una misma constante cualquiera.

Sea pues k una constante arbitraria; se tendrán estas dos ecuaciones:

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = k \quad \text{y} \quad \frac{\Phi''(u - t\sqrt{-1})}{\Phi(u - t\sqrt{-1})} = k,$$

o bien (siendo indiferente cualquiera que sea la variable bajo los signos de las funciones) se obtendrán más sencillamente estas dos:

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = k \quad \text{y} \quad \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} = k,$$

a saber:

$$\frac{d^2\varphi(z)}{\varphi(z) dz^2} = k \quad \text{y} \quad \frac{d^2\Phi(z)}{\Phi(z) dz^2} = k,$$

que son integrables por las reglas conocidas.

Se obtendrán pues, integrando:

$$\varphi(z) = Me^{z\sqrt{k}} + Ne^{-z\sqrt{k}} \quad \text{y} \quad \Phi(z) = Pe^{z\sqrt{k}} + Qe^{-z\sqrt{k}},$$

siendo M , N , P y Q coeficientes cualesquiera positivos o negativos, reales o imaginarios.

Ahora bien

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \quad \text{y} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{F'(z)}};$$

luego se tendrán:

$$f'(z) = \frac{1}{(Me^{z\sqrt{k}} + Ne^{-z\sqrt{k}})^2} = \frac{e^{2z\sqrt{k}}}{(Me^{2z\sqrt{k}} + N)^2}$$

y

$$F'(z) = \frac{1}{(Pe^{z\sqrt{k}} + Qe^{-z\sqrt{k}})^2} = \frac{e^{2z\sqrt{k}}}{(Pe^{2z\sqrt{k}} + Q)^2};$$

pero

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{y} \quad F'(z) = \frac{dF(z)}{dz};$$

luego, multiplicando las ecuaciones precedentes por dz e integrando, se obtendrán:

$$f(z) = -\frac{1}{2M(Me^{2z\sqrt{k}} + N)\sqrt{k}} + G$$

y

$$F(z) = -\frac{1}{2P(Pe^{2z\sqrt{k}} + Q)\sqrt{k}} + H,$$

siendo G y H nuevas constantes arbitrarias.

Así la forma de las funciones arbitrarias está determinada, y poniendo en $f(z)$: $u + t\sqrt{-1}$ en lugar de z , y en $F(z)$: $u - t\sqrt{-1}$, se obtendrán estas expresiones:

$$f(u + t\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2M(Me^{2u\sqrt{k}+2t\sqrt{-k}} + N)\sqrt{k}} + G$$

y

$$F(u - t\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2P(Pe^{2u\sqrt{k}-2t\sqrt{-k}} + Q)\sqrt{k}} + H,$$

que no habrá más que sustituir en los valores de x e y (3).

11. Pero, antes de hacer esa sustitución, observo que, pudiendo ser la cantidad k igualmente positiva o negativa, se obtendrán fórmulas diferentes en los dos casos, y toda la diferencia consistirá en que las cantidades t y u se encontrarán una en el lugar de la otra; esto es evidente con respecto al valor de $f(u + t\sqrt{-1})$; para hacerlo ver también respecto al de $F(u - t\sqrt{-1})$, pongo en lugar de la constante arbitraria H la cantidad también arbitraria $1/(2PQ\sqrt{k}) + H$, y reduciendo a común denominador las dos fracciones, dividiendo después en la fracción resultante arriba y abajo por $e^{2u\sqrt{k}-2t\sqrt{-k}}$, obtengo

$$F(u - t\sqrt{-1}) = \frac{1}{2Q(Qe^{-2u\sqrt{k}+2t\sqrt{-k}} + P)\sqrt{k}} + H,$$

expresión que resulta evidentemente de la precedente cambiando el signo de k , y poniendo t en lugar de u y P en lugar de Q , y recíprocamente. De aquí concluyo por tanto que basta considerar el caso en que k es una cantidad positiva, y que después no habrá más que intercambiar t por u para tener el de k negativo. En efecto es fácil ver por la ecuación fundamental

$$dx^2 + dy^2 = n^2 (du^2 + dt^2)$$

del n.º 3 que las variables u y t son permutables.

12. Haré pues para mayor sencillez $k = c^2$, y obtendré:

$$x = -\frac{1}{4cM(Me^{2cu+2ct\sqrt{-1}} + N)} - \frac{1}{4cP(Pe^{2cu-2ct\sqrt{-1}} + Q)} + \frac{G+H}{2}$$

e

$$y = -\frac{1}{4cM(Me^{2cu+2ct\sqrt{-1}} + N)\sqrt{-1}} + \frac{1}{4cP(Pe^{2cu-2ct\sqrt{-1}} + Q)\sqrt{-1}} + \frac{G-H}{2\sqrt{-1}},$$

donde hay que determinar las constantes arbitrarias G , H , M , N , P y Q de modo que las partes imaginarias se cancelen.

Se tendrá pues primero:

$$\frac{G+H}{2} = A \quad \text{y} \quad \frac{G-H}{2\sqrt{-1}} = B,$$

siendo A y B constantes reales cualesquiera; después es obvio que al hacer para mayor generalidad

$$M = C + D\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad N = E + I\sqrt{-1},$$

siendo también C , D , E e I cantidades reales cualesquiera, será necesario hacer

$$P = C - D\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad Q = E - I\sqrt{-1},$$

y entonces las partes imaginarias se cancelan consigo mismas en las expresiones precedentes de x e y . Pero en lugar de las suposiciones precedentes, haremos, lo que es lo mismo:

$$M = a (\cos g + \operatorname{sen} g \sqrt{-1}) = ae^{g\sqrt{-1}},$$

$$N = b (\cos h + \operatorname{sen} h \sqrt{-1}) = be^{h\sqrt{-1}},$$

$$P = a (\cos g - \operatorname{sen} g \sqrt{-1}) = ae^{-g\sqrt{-1}}$$

y

$$Q = b (\cos h - \operatorname{sen} h \sqrt{-1}) = be^{-h\sqrt{-1}},$$

siendo a , b , g y h constantes arbitrarias reales; hechas estas sustituciones, se obtendrán, después de las reducciones pertinentes:

$$x = A - \frac{a \cos [2(ct + g)] + b \cos (g + h) e^{-2cu}}{2ac[a^2e^{2cu} + 2ab \cos (2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}]}$$

e

$$y = B + \frac{a \operatorname{sen} [2(ct + g)] + b \operatorname{sen} (g + h) e^{-2cu}}{2ac[a^2e^{2cu} + 2ab \cos (2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}]}.$$

13. Si ahora se elimina de estas dos ecuaciones la variable u , se obtendrá una ecuación con x , y y t , que será por consiguiente la de todas las curvas que representan a los diferentes meridianos correspondientes a diferentes longitudes t ; y recíprocamente, si se elimina la variable t , se obtendrá una ecuación con x , y y u , que será la ecuación común a todas las curvas que representan a los diferentes paralelos.

Para hacer más fáciles esas eliminaciones, comienzo por añadir juntos los valores de $(x - A)^2$ y de $(y - B)^2$; obtengo

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = \frac{e^{-2cu}}{4a^2c^2[a^2e^{2cu} + 2ab \cos (2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}]},$$

de donde extraigo

$$a^2e^{2cu} + 2ab \cos (2ct + g - h) + b^2e^{-2cu} = \frac{e^{-2cu}}{4a^2c^2[(x - A)^2 + (y - B)^2]},$$

y, sustituyendo en los valores de x e y , obtendré estas ecuaciones:

$$\frac{x - A}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = -2ac [ae^{2cu} \cos [2(ct + g)] + b \cos (g + h)]$$

e

$$\frac{y - B}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = 2ac [ae^{2cu} \sen [2(ct + g)] + b \sen (g + h)] ,$$

de donde ahora es fácil eliminar u o t .

14. Al eliminar primero la cantidad e^{2cu} , se obtendrá esta ecuación:

$$\frac{(x - A) \sen [2(ct + g)] + (y - B) \cos [2(ct + g)]}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = -2abc \sen (2ct + g - h) ,$$

que se reduce a esta:

$$\left[x - A + \frac{\sen [2(ct + g)]}{4abc \sen (2ct + g - h)} \right]^2 + \left[y - B + \frac{\cos [2(ct + g)]}{4abc \sen (2ct + g - h)} \right]^2 = \frac{1}{[4abc \sen (2ct + g - h)]^2} ,$$

que se ve claramente es de una circunferencia; y si se llama r al radio de la circunferencia, X a la abscisa e Y a la ordenada que determinan la posición de su centro, se obtendrán:

$$r = \frac{1}{4abc \sen (2ct + g - h)} ,$$

$$X = A - r \sen [2(ct + g)] \quad \text{e} \quad Y = B - r \cos [2(ct + g)] .$$

Al eliminar además el ángulo t de estas dos últimas ecuaciones, se obtendrá esta:

$$(X - A) \cos(g + h) - (Y - B) \sen(g + h) + \frac{1}{4abc} = 0 ,$$

que dará el lugar de todos los centros en cuestión, es decir, de todos los centros de las circunferencias que representan a los meridianos; y se ve que este lugar es una recta que forma con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente será

$$\frac{dY}{dX} = \cotg(g + h) ,$$

de modo que ese ángulo será igual a $90^\circ - g - h$.

15. Eliminamos ahora el ángulo t en las fórmulas del n.º **13** para obtener las curvas de los paralelos, y se obtendrá esta ecuación:

$$\left[\frac{x-A}{(x-A)^2 + (y-B)^2} + 2abc \cos(g+h) \right]^2 + \left[\frac{y-B}{(x-A)^2 + (y-B)^2} - 2abc \sin(g+h) \right]^2 = 4a^4 c^2 e^{4cu},$$

a saber:

$$\frac{1 + 4abc \cos(g+h)(x-A) - 4abc \sin(g+h)(y-B)}{(x-A)^2 + (y-B)^2} = 4a^2 c^2 (a^2 e^{4cu} - b^2),$$

que se transforma fácilmente en esta:

$$\left[x-A - \frac{b \cos(g+h)}{2ac(a^2 e^{4cu} - b^2)} \right]^2 + \left[y-B + \frac{b \sin(g+h)}{2ac(a^2 e^{4cu} - b^2)} \right]^2 = \frac{e^{4cu}}{4c^2 (a^2 e^{4cu} - b^2)^2},$$

que también se ve es de una circunferencia; y, si se llama ρ al radio de esa circunferencia, ξ a la abscisa y η a la ordenada que corresponden al centro de la misma circunferencia, se obtendrán:

$$\rho = \frac{e^{2cu}}{2c(a^2 e^{4cu} - b^2)},$$

$$\xi = A + \frac{b}{a} \cos(g+h) \rho e^{-2cu},$$

y

$$\eta = B - \frac{b}{a} \sin(g+h) \rho e^{-2cu}.$$

Y, si se elimina la variable u de estas últimas ecuaciones, se obtendrá, para el lugar de todos los centros de las circunferencias que representan a los paralelos, la ecuación

$$(\xi - A) \sin(g+h) + (\eta - B) \cos(g+h) = 0,$$

que es una recta inclinada con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente será

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{tg}(g+h);$$

de modo que ese ángulo será $180^\circ - g - h$; por consiguiente esa recta será perpendicular a la que encierra todos los centros de los meridianos (apartado precedente).

16. Busquemos también el valor de la cantidad m que expresa la proporción según la cual cada región de la Tierra está aumentada o disminuida en el Mapa, guardando no obstante su forma natural.

Hemos visto (8) que $m = 1/(q\Omega)$; así no hay más que buscar el valor de la cantidad Ω . Ahora bien, si en la expresión de Ω del n.º 10 se sustituye en lugar de las funciones denotadas por φ y Φ sus valores hallados en el mismo apartado, se obtiene

$$\Omega = MPe^{2u\sqrt{k}} + NQe^{-2u\sqrt{k}} + MQe^{2t\sqrt{-k}} + NPe^{-2t\sqrt{-k}},$$

que se reduce por las sustituciones del n.º 12 a esta forma:

$$\Omega = a^2e^{2cu} + 2ab\cos(2ct + g - h) + b^2e^{-2cu};$$

de modo que se obtendrá

$$m = \frac{1}{q[a^2e^{2cu} + 2ab\cos(2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}] }.$$

17. El valor precedente de Ω puede dar una prueba de la exactitud de nuestras fórmulas; pues, habiendo visto (7) que los radios r y ρ de los meridianos y de los paralelos se determinan, en general, por las fórmulas

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\Omega}{du},$$

será necesario que, al sustituir Ω por su valor, resulten los mismos valores de r y ρ que hemos hallado más arriba según las ecuaciones de las circunferencias que representan a los meridianos y a los paralelos. Ahora bien esto se verifica en efecto como puede comprobarse por la diferenciación de la cantidad Ω .

18. Aquí es el lugar para examinar las condiciones necesarias para que la cantidad m sea constante, o al menos una función de u sin t . Ya hemos visto (8) que en ese caso todos los meridianos del Mapa deberían ser rectas; así las fórmulas halladas más arriba, en el caso en que los meridianos fueran circunferencias cualesquiera, también tendrán lugar en el caso presente. No se tratará pues más que ver si la expresión de m del n.º 16 puede hacerse una función solo de u . Luego, como q puede suponerse una función de u , será necesario que el término $2ab\cos(2ct + g - h)$, que encierra t , desaparezca; lo que no puede suceder sino cuando

$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0.$$

En el primer caso se obtendrá

$$m = \frac{1}{qb^2e^{-2cu}},$$

y en el otro

$$m = \frac{1}{qa^2e^{2cu}};$$

luego se tendrá, en general:

$$q = \frac{Ae^{Bu}}{m},$$

siendo A y B constantes cualesquiera; ecuación que servirá para determinar la forma del meridiano, al mismo tiempo que m estará dada según u . Al diferenciar logarítmicamente, se obtendrá

$$\frac{dq}{q} = Bdu - \frac{dm}{m};$$

pero $du = ds/q$; luego

$$dq + q\frac{dm}{m} = Bds;$$

y de ahí, multiplicando por m e integrando:

$$mq = B \int m ds + C;$$

luego

$$q = \frac{B \int m ds + C}{m};$$

lo que dará q según s , si m ya está dada según s .

Luego, si se quisiera que m fuera constante, se obtendría

$$q = Bs + \frac{C}{m};$$

lo que evidentemente da una recta para los meridianos de la Tierra, y por consiguiente un cono recto para la forma de la Tierra.

19. Hasta ahora nuestras fórmulas son independientes de la forma de los meridianos de la Tierra; pero, para poder aplicar esas fórmulas a la construcción de los Mapas, es necesario conocer qué función de la latitud es la variable u , que hemos supuesto tal que $du = ds/q$, siendo s el arco de meridiano contado desde el polo y q la ordenada perpendicular al eje de la Tierra (**3**).

Ahora bien, si se supone la Tierra esférica, así se hace comúnmente en los Mapas, y se toma, para mayor sencillez, el radio de la Tierra como unidad, se tendrá evidentemente

$$q = \operatorname{sen} s,$$

y el arco s será al mismo tiempo la distancia al polo o el complemento de la latitud. Luego en ese caso se tendrá

$$du = \frac{ds}{\operatorname{sen} s};$$

cuya integral es

$$u = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos s}{1 + \cos s} = \log \operatorname{tg} \frac{s}{2};$$

de modo que al añadir una constante arbitraria $\log k$, se obtendrá en general

$$u = \log \left(k \operatorname{tg} \frac{s}{2} \right),$$

y de ahí

$$e^{cu} = \left(k \operatorname{tg} \frac{s}{2} \right)^c;$$

así las exponenciales desaparecerán completamente, y no habrá más que senos y cosenos. Pero, para dar a nuestra solución toda la generalidad de la que es susceptible, es necesario determinar los valores de q y de u sin constreñirse a la hipótesis de la Tierra esférica.

Supondremos pues que la Tierra es un esferoide elíptico achatado por los polos; y haremos el radio del ecuador o el semieje mayor de la elipse que forma los meridianos igual a 1, y el semieje menor de esa elipse, es decir, el semieje de la Tierra, igual a γ . Al tomar las abscisas p en este semieje desde su vértice, con arreglo a las suposiciones del n.º 1, se obtendrá para la elipse la ecuación

$$(1 - p)^2 + \gamma^2 q^2 = \gamma^2,$$

de donde se obtiene por diferenciación

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\gamma^2 q}{1 - p};$$

ahora bien es obvio que dp/dq es igual a la tangente del ángulo que la perpendicular a la elipse forma con el eje de abscisas p ; así en el caso presente dp/dq será igual a la tangente del ángulo que expresa la distancia al polo o el complemento de la latitud.

Llamando pues, en general, z a la distancia al polo o el complemento de la latitud, se tendrá

$$\frac{dp}{dq} = \operatorname{tg} z;$$

luego

$$\frac{\gamma^2 q}{1-p} = \operatorname{tg} z;$$

luego

$$q = \frac{(1-p) \operatorname{tg} z}{\gamma^2};$$

sustituyendo este valor de q en la ecuación de la elipse, se obtendrá

$$1-p = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 + \operatorname{tg}^2 z}},$$

y de ahí

$$q = \frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{\gamma^2 + \operatorname{tg}^2 z}}.$$

Diferenciando, se obtendrá:

$$dp = \frac{\gamma^2 \operatorname{tg} z \, d \operatorname{tg} z}{(\gamma^2 + \operatorname{tg}^2 z)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad dq = \frac{\gamma^2 \, d \operatorname{tg} z}{(\gamma^2 + \operatorname{tg}^2 z)^{\frac{3}{2}}};$$

luego

$$ds = \sqrt{dp^2 + dq^2} = \frac{\gamma^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}}{(\gamma^2 + \operatorname{tg}^2 z)^{\frac{3}{2}}} d \operatorname{tg} z;$$

pero se tiene (3) $du = ds/q$; luego

$$du = \frac{\gamma^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}}{\operatorname{tg} z (\gamma^2 + \operatorname{tg}^2 z)} d \operatorname{tg} z = \frac{\gamma^2 dz}{\operatorname{sen} z (\gamma^2 \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z)}.$$

Sea

$$1 - \gamma^2 = \varepsilon^2,$$

de modo que ε sea la excentricidad de la elipse que forma los meridianos de la Tierra; se tendrá

$$du = \frac{\gamma^2 dz}{\operatorname{sen} z (\gamma^2 + \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 z)} = \frac{dz}{\operatorname{sen} z} - \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen} z \, dz}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z};$$

la integral de $dz/\sin z$ es

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z} = \log \operatorname{tg} \frac{z}{2},$$

la integral de $\frac{\varepsilon^2 \sin z \, dz}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}$ es

$$\frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1 - \varepsilon \cos z}{1 + \varepsilon \cos z};$$

luego se obtendrá, añadiendo una constante arbitraria $\log k$,

$$u = \log \left[k \operatorname{tg} \frac{z}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos z}{1 - \varepsilon \cos z} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right].$$

Y, si en la expresión de q también se sustituye $1 - \varepsilon^2$ en lugar de γ^2 , se obtendrá

$$q = \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}.$$

En el caso en que la Tierra es esférica se tiene $\varepsilon = 0$; luego

$$u = \log \left(k \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right),$$

como se halló más arriba; ahora bien se pueden hacer semejantes las dos expresiones de u tomando un ángulo ζ tal que se tenga

$$\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{z}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos z}{1 - \varepsilon \cos z} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

porque en tal caso se obtendrá igualmente

$$u = \log \left(k \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right);$$

de modo que se podrá ver el ángulo ζ como la distancia al polo corregida en virtud del achatamiento de la Tierra; y, como la excentricidad ε es muy pequeña, se podrá hallar la corrección en cuestión, es decir, la diferencia de ζ y z , expresada por una serie fuertemente convergente, por medio de las fórmulas que di en las *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin* de 1776 (*Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 275). Se tendrá pues por esas fórmulas:

$$\zeta = z - 2\theta \sin z + \frac{2\theta^2}{2} \sin 2z - \frac{2\theta^3}{3} \sin 3z + \dots,$$

suponiendo

$$\theta = \frac{(1 - \varepsilon \cos z)^{\frac{\varepsilon}{2}} - (1 + \varepsilon \cos z)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(1 - \varepsilon \cos z)^{\frac{\varepsilon}{2}} + (1 + \varepsilon \cos z)^{\frac{\varepsilon}{2}}},$$

o bien, reduciendo en serie,

$$\theta = -\frac{\varepsilon^2 \cos z + \frac{\varepsilon^4(\varepsilon - 2)(\varepsilon - 4)}{4 \cdot 6} \cos^2 z + \dots}{2 + \frac{\varepsilon^3(\varepsilon - 2)}{4} \cos^2 z + \dots}.$$

Despreciando las cantidades del orden ε^4 , se obtendrán:

$$\theta = -\frac{\varepsilon^2 \cos z}{2} \quad \text{y} \quad \zeta = z + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2z;$$

y esta aproximación tiene toda la exactitud que se puede desear.

20. Así pues hemos resuelto de un modo general el Problema geográfico del que la proyección estereográfica no proporciona más que una solución particular. Lo que hace esta proyección tan útil para la construcción de Mapas son las dos propiedades de las que hemos hecho mención al comienzo de esta Memoria, y que consisten: 1.^o en que cada parte de la superficie de la Tierra tiene en el Mapa una forma semejante a la que tiene en la Tierra, y no se altera más que en su tamaño; 2.^o en que todos los meridianos y paralelos de la Tierra se encuentran representados en el Mapa por circunferencias. Hemos tomado estas dos condiciones como los datos del Problema, y hemos llegado a una solución general que contiene necesariamente todas las formas posibles de satisfacer esas mismas condiciones. Como hay varias consecuencias a extraer de esta solución, las desarrollaremos en la continuación de estas Investigaciones, que será el objeto de una segunda Memoria.

Segunda memoria

Entre los diferentes métodos que se han ideado para la construcción de los Mapas terrestres, hay dos que merecen principalmente la atención de los Geómetras; uno está fundado sobre los principios de la proyección estereográfica de Ptolomeo, y el otro depende de la Teoría de las latitudes crecientes. El primero se emplea comúnmente en los Mapamundis y en los Mapas propiamente dichos, y tiene la ventaja de que todos los meridianos y paralelos de la Tierra, y, en general, todas las circunferencias del globo se representan también por circunferencias; el segundo está destinado únicamente a las Cartas

marinas, y difiere del precedente principalmente en que todos los meridianos y paralelos de la Tierra se representan por rectas. Pero uno y otro tienen esta propiedad común: no alteran la figura de cada parte infinitamente pequeña de la superficie de la Tierra; de modo que todos los ángulos que se pueden formar en la Tierra siguen siendo los mismos en los Mapas construidos por estos métodos.

Esta propiedad, considerada en sí misma e independientemente de cualquier otra, da lugar a una cuestión analítica muy curiosa, que consiste en determinar la naturaleza de las curvas que se deben trazar en un plano para representar a los meridianos y los paralelos de la Tierra de modo que siempre tenga lugar la misma propiedad. No es difícil hallar las fórmulas generales que resuelven este Problema en toda su extensión; pero como esas fórmulas encierran funciones arbitrarias, surge una nueva cuestión concerniente al modo de determinar la forma de esas funciones de manera que las líneas que deben representar a los meridianos y paralelos sean de una naturaleza dada. Esta cuestión secundaria es de algún modo mucho más difícil que la cuestión principal, y no sé incluso si no supera las capacidades del Análisis conocido; pero, para la utilidad de la Geografía, no es necesario resolverla en general para meridianos y paralelos de una forma cualquiera; basta resolverla en el caso particular en que los meridianos y los paralelos deben ser arcos de circunferencia, lo que comprende a la vez a la proyección estereográfica y a las Cartas reducidas; en efecto todas las demás soluciones no serían más que por pura curiosidad, a causa de la dificultad que siempre habría en la práctica para trazar las curvas de los meridianos y los paralelos, si fueran distintas de la circunferencia.

Semejante Problema es el que ha sido el principal objeto de la Memoria precedente, y que nadie, que yo sepa, había tratado todavía de resolver. La solución que yo he dado no deja, a mi parecer, nada que desear por parte del Análisis; pero como hay muchas consecuencias y aplicaciones a deducir de esa solución, he creído que era oportuno examinarla en detalle; es a lo que se destinan las siguientes Investigaciones, en las cuales conservaré por la comodidad de las citas la serie de cifras que distinguen los apartados.

21. En primer lugar observo que las fórmulas halladas en la primera Memoria (**12** y **16**) contienen dos soluciones diferentes, ya que se ha visto (**11**) que está permitido cambiar t por u y u por t ; pero observo al mismo tiempo que la solución que resultaría de esta permutación sería más curiosa que cómoda en la práctica, ya que contendría exponenciales del ángulo t y senos y cosenos de la cantidad u que, hemos demostrado, es una cantidad logarítmica (**19**); mientras que la solución que inmediatamente dan las fórmulas en cuestión no encierran más que senos y cosenos de los ángulos t y z , a causa

de

$$e^u = k \operatorname{tg} \frac{z}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos z}{1 - \varepsilon \cos z} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Por eso nos contentaremos con examinar esta solución.

Ella encierra, como se ve, algunas constantes arbitrarias, de las cuales unas contribuyen a su generalidad, pero las otras no dan sino una generalidad aparente, puesto que dependen de la posición arbitraria de los ejes de coordenadas; se puede pues, determinando estas últimas de una forma conveniente, ganar una mayor simplicidad, sin perder nada de generalidad.

Para esto observo que, como las dos rectas que son los lugares de los centros de todos los meridianos y de todos los paralelos del Mapa son perpendiculares una a otra, se pueden tomar estas mismas rectas como los ejes de coordenadas.

Supondremos pues que la recta de los centros de todos los meridianos es el eje de coordenadas y , y que la recta de los centros de todos los paralelos es el eje de abscisas x ; para esto será necesario (**14** y **15**): 1.º que el ángulo $90^\circ - g - h$ sea recto, lo que da $g + h = 0$, y por consiguiente $h = -g$; 2.º que se tenga, en general, $X = 0$, lo que da $A = 1/(4abc)$; 3.º que se tenga también, en general, $\eta = 0$, lo que dará $B = 0$. Luego si se hacen estas sustituciones, y se pone en lugar de u y de q sus valores en función de z del n.º **19**; además se cambia a por a/k^c , b por bk^c , $2c$ por c , y $2g$ por $-cg$, lo que evidentemente está permitido, ya que a , b , c , g y k son constantes arbitrarias; y se hace, para abreviar,

$$\theta = \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{z}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos z}{1 - \varepsilon \cos z} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

se obtendrán:

$$x = \frac{a^2\theta^c - b^2\theta^{-c}}{2abc[a^2\theta^c + 2ab \cos[c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]},$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}[c(t - g)]}{c[a^2\theta^c + 2ab \cos[c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]},$$

$$\frac{1}{r} = 2abc \operatorname{sen}[c(t - g)], \quad Y = -\frac{\operatorname{cotg}[c(t - g)]}{2abc},$$

$$\frac{1}{\rho} = c(a^2\theta^c - b^2\theta^{-c}), \quad \xi = \frac{a^2\theta^c + b^2\theta^{-c}}{2abc(a^2\theta^c - b^2\theta^{-c})}$$

y

$$m = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{\operatorname{sen} z [a^2\theta^c + 2ab \cos[c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]}.$$

En estas fórmulas t es la longitud de un meridiano cualquiera, z el complemento de la latitud de un paralelo cualquiera en la superficie de la Tierra, ε la excentricidad de los meridianos de la Tierra; a , b , c y g son cuatro constantes arbitrarias; x e y son la abscisa y la ordenada que determinan en el Mapa la posición de un lugar cualquiera cuya longitud es t y cuyo complemento de la latitud es z ; r es el radio de la circunferencia que representa a un meridiano cualquiera y cuyo centro debe estar colocado en el eje de ordenadas a la distancia Y del de abscisas; ρ es el radio de la circunferencia que representa a un paralelo cualquiera, y cuyo centro debe estar colocado en el eje de abscisas a la distancia ξ del de ordenadas; por último $1:m$ es la proporción según la cual el tamaño de cada región de la Tierra está aumentado o disminuido en el Mapa, suponiendo el radio del ecuador igual a 1.

22. Al considerar las fórmulas precedentes, es fácil ver que nacen diferentes clases de proyecciones geográficas, según se den diferentes valores a la constante c , que llamaremos por esto el *exponente de la proyección*.

Y primero, si se hace $c = 0$, se obtendrán:

$$\frac{1}{r} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} = 0;$$

por consiguiente

$$r = \infty \quad \text{y} \quad \rho = \infty;$$

lo que da rectas para los meridianos y los paralelos; este es el caso de las Cartas reducidas.

Para determinar pues en este caso la posición de los diferentes meridianos y de los diferentes paralelos, se hará $c = 0$ en las expresiones de x e y , o mejor solo se supondrá c infinitamente pequeño, observando que se tiene

$$\theta^c = 1 + c \log \theta \quad \text{y} \quad \theta^{-c} = 1 - c \log \theta;$$

y se hallará:

$$x = \frac{a-b}{2abc(a+b)} + \frac{a^2+b^2}{2ab(a+b)^2} \log \theta \quad \text{e} \quad y = \frac{t-g}{(a+b)^2};$$

ahora bien, siendo c nulo, para que x no sea infinito es necesario que $a-b$ sea nulo al mismo tiempo que c ; luego

$$a-b = ch \quad \text{y} \quad b = a - ch,$$

siendo h una constante cualquiera; substituyendo este valor, y haciendo $c = 0$, se obtendrá pues

$$x = \frac{h}{4a^3} + \frac{\log \theta}{4a^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{t-g}{4a^2},$$

o más sencillamente:

$$x = A + B \log \theta \quad \text{e} \quad y = C + Bt,$$

siendo A , B y C constantes arbitrarias.

Como t es la longitud y θ depende solo de la latitud, es claro que

$$y = C + Bt$$

es la ecuación común a todos los meridianos, y que

$$x = A + B \log \theta$$

es la ecuación común a todos los paralelos. Así las primeras son rectas paralelas al eje de abscisas y cuya distancia a ese eje crece proporcionalmente a la longitud t ; y las últimas son rectas paralelas al eje de ordenadas y cuya distancia a ese eje crece proporcionalmente a los logaritmos de θ .

En las Cartas reducidas ordinarias se supone la Tierra esférica, lo que da $\varepsilon = 0$, y por consiguiente

$$\theta = \operatorname{tg} \frac{z}{2};$$

lo que concuerda con la Teoría conocida de esos tipos de Mapas. Pero al tener en cuenta el achatamiento de la Tierra, se tendrá

$$\theta = \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2};$$

así pues en ese caso no habrá más que emplear la distancia al polo corregida ζ (**19**) en lugar de z .

Respecto al valor de m , será, poniendo B en lugar de $1/(a+b)^2$,

$$m = \frac{B\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{\operatorname{sen} z}.$$

23. Después de haber examinado el caso en que la cantidad c es nula, supondremos que esta cantidad tiene un valor real cualquiera; y observaremos primero, en general, que al hacer c negativo en las fórmulas del n.º **21**, se obtiene el mismo resultado que si se cambia solamente a por b . De donde resulta que, para tener todos los casos posibles, basta dar a c valores positivos.

Veamos primero si hay meridianos y paralelos que estén representados en el Mapa por rectas.

Para esto es necesario buscar los valores de t y de θ que dan $r = \infty$ y $\rho = \infty$; y es obvio que la suposición $r = \infty$ dará

$$\operatorname{sen} [c(t - g)] = 0,$$

y por consiguiente

$$t = g \quad \text{o} \quad t = 180^\circ + g;$$

y que $\rho = \infty$ dará

$$a^2\theta^c - b^2\theta^{-c} = 0,$$

de donde se obtiene

$$\theta^c = \pm \frac{b}{a}.$$

Al hacer estas sustituciones en las expresiones de x e y , una y otra se hacen nulas. De donde se concluirá primero que el eje de abscisas es él mismo un meridiano que responde a la longitud $t = g$, y que el eje de ordenadas es él mismo un paralelo que responde a una distancia al polo corregida ζ tal que

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}\right)^c = \pm \frac{b}{a}.$$

Llamaremos, en general, *centro del Mapa* al punto en el cual se cortan con ángulos rectos el meridiano y el paralelo que deben representarse por rectas; este punto será el origen de coordenadas x e y ; el meridiano rectilíneo será el eje de las x , y el paralelo rectilíneo será el eje de las y .

Como las cantidades a , b y g son arbitrarias, se podrá tomar un lugar cualquiera de la Tierra a voluntad como el centro del Mapa. Se hará la longitud de ese lugar igual a g , y, siendo llamada la latitud $90^\circ - h$, se tendrá

$$\frac{b}{a} = \pm \left(\operatorname{tg} \frac{h}{2}\right)^c.$$

24. Ahora, como todos los meridianos deben cortarse en los polos, resulta que los polos del Mapa estarán colocados en el eje de abscisas. Para determinarlos no habrá más que hacer $z = 0$ y $z = 180^\circ$; al contar comúnmente las distancias al polo desde el polo boreal de la Tierra, la suposición $z = 0$ dará el polo boreal del Mapa, y la suposición $z = 180^\circ$ dará el polo austral. Ahora bien $z = 0$ da $\theta = 0$, y $z = 180^\circ$ da $\theta = \infty$; haciendo pues estas suposiciones en las expresiones de x e y , se obtendrá para el polo boreal:

$$x = -\frac{1}{2abc} \quad \text{e} \quad y = 0,$$

y para el polo austral:

$$x = \frac{1}{2abc} \quad \text{e} \quad y = 0;$$

donde se ve que los dos polos están colocados a una parte y a otra del centro a distancias iguales.

$$ab = \frac{1}{2\delta c};$$
$$\frac{b}{a} = \pm \left(\operatorname{tg} \frac{h}{2} \right)^c,$$

25. Veamos ahora cómo se debe proceder para trazar los meridianos y los paralelos de un Mapa cuyo centro y eje están dados.

Sea C el centro del Mapa (fig. 1), B su polo boreal, de modo que $BC = \delta$; con centro C y radio BC se describe la circunferencia $BDAE$, y se trazan los dos diámetros BCA y DCE perpendiculares entre ellos; el punto A será el polo austral del Mapa; el punto C será el origen de coordenadas x e y ; la línea AB será el eje del Mapa y al mismo tiempo el eje de las abscisas x , que serán positivas yendo de C hacia A , y negativas yendo de C hacia B ; y la línea DE será el eje de las ordenadas y , que serán positivas yendo de C hacia

D , y negativas yendo de C hacia E . Los centros de las circunferencias que representarán a los diferentes meridianos del Mapa estarán colocados en la línea DE (prolongada a una parte y a otra si es necesario) a la distancia Y del punto C , y sus radios serán iguales a r ; y los centros de las circunferencias que representarán a los paralelos estarán colocados en la línea BA a la distancia ξ del punto C , y sus radios serán iguales a ρ . Así se podrán describir estas diferentes circunferencias por medio de las fórmulas del n.º 21, al mismo tiempo que se habrán determinado las constantes a , b y g como lo hemos enseñado en el número precedente. Pero, para facilitar estas operaciones tanto como sea posible, vamos a reducirlas a construcciones muy sencillas y muy cómodas en la práctica.

26. Y primero, por lo que concierne a los meridianos, voy a determinar los puntos donde cada meridiano corta al eje DE prolongado si es necesario. Para esto no hay más que buscar los valores de y que responden a $x = 0$ en las fórmulas del n.º 21. Ahora bien, haciendo $x = 0$, se obtiene

$$a^2\theta^c - b^2\theta^{-c} = 0;$$

luego, al tomar el cuadrado, se tendrá también

$$a^4\theta^{2c} - 2a^2b^2 + b^4\theta^{-2c} = 0;$$

sumando a una parte y a otra la cantidad $4a^2b^2$ y extrayendo la raíz cuadrada, se obtendrá

$$a^2\theta^c + b^2\theta^{-c} = \pm 2ab;$$

sustituyendo este valor en la expresión de y , se convierte en

$$y = \frac{\text{sen}[c(t-g)]}{2abc[\cos[c(t-g)] \pm 1]},$$

o bien, por las fórmulas trigonométricas conocidas, y a causa de $1/(2abc) = \delta$,

$$y = \delta \operatorname{tg} \frac{c(t-g)}{2} \quad \text{o} \quad = -\delta \operatorname{cotg} \frac{c(t-g)}{2}.$$

Se tomarán pues los arcos BT y AT' con un número de grados igual al ángulo $c(t-g)$, siendo $t-g$ la diferencia de longitud entre el meridiano que se intenta trazar y el meridiano que pasa por el lugar que se supone está en el centro del Mapa; y habiendo trazado desde el punto A las cuerdas AT y AT' , los puntos M y N , donde estas cuerdas cortan la línea DE prolongada si es necesario, serán los dos extremos del diámetro MN de la circunferencia que representará al meridiano buscado; de modo que no habrá más que describir

esta circunferencia con el centro colocado en mitad de la línea MN ; y es fácil demostrar por la Geometría que esta circunferencia pasará al mismo tiempo por los puntos A y B que son los polos del Mapa. Esta construcción se sigue evidentemente de que el ángulo BAT es igual a $c(t-g)/2$, y el ángulo BET' igual a $[180^\circ - c(t-g)]/2 = 90^\circ - c(t-g)/2$; de modo que siendo CA igual a δ , se tendrá

$$CM = \delta \operatorname{tg} \frac{c(t-g)}{2} \quad \text{y} \quad CN = -\delta \operatorname{cotg} \frac{c(t-g)}{2}.$$

27. Venimos ahora a los paralelos, y buscamos del mismo modo los puntos donde cada paralelo debe cortar el eje BA . Se supondrá pues $y = 0$, lo que dará

$$\operatorname{sen} [c(t-g)] = 0,$$

y por consiguiente

$$c(t-g) = 0 \quad \text{o} \quad = 180^\circ;$$

se hará esta sustitución en la expresión de x y se obtendrá

$$x = \frac{a^2\theta^c - b^2\theta^{-c}}{2abc(a^2\theta^c \pm 2ab + b^2\theta^{-c})},$$

que se reduce a

$$x = \frac{a\theta^{\frac{c}{2}} \mp b\theta^{\frac{-c}{2}}}{2abc(a\theta^{\frac{c}{2}} \pm b\theta^{\frac{-c}{2}})} = \frac{\theta^c \mp \frac{b}{a}}{2abc\left(\theta^c \pm \frac{b}{a}\right)}.$$

Ahora bien:

$$\theta = \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2},$$

siendo ζ la distancia al polo corregida del paralelo, y

$$\frac{b}{a} = \pm \left(\operatorname{tg} \frac{h}{2} \right)^c,$$

siendo h la distancia al polo corregida del lugar que responde al centro del Mapa, la cual se supone dada, siendo por otra parte a voluntad los signos ambiguos; luego, puesto que $1/(2abc) = \delta$, se obtendrá

$$x = -\delta \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{h}{2} \right)^c \mp \left(\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right)^c}{\left(\operatorname{tg} \frac{h}{2} \right)^c \pm \left(\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right)^c}.$$

Al tomar los signos superiores se obtendrá la distancia CQ , y al tomar los signos inferiores se obtendrá la distancia CP ; y la circunferencia descrita sobre el diámetro PQ será el paralelo buscado.

28. Si se supone $c = 1$, entonces la fórmula precedente se convierte en

$$x = -\delta \frac{\operatorname{tg} \frac{h}{2} \mp \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{h}{2} \pm \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}} = -\delta \frac{\operatorname{sen} \frac{h \mp \zeta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{h \pm \zeta}{2}},$$

que es muy cómoda para el cálculo logarítmico. Para la construcción se cambiará $\operatorname{sen}[(h \mp \zeta)/2]$ por su equivalente:

$$\operatorname{sen} \left(h - \frac{h \pm \zeta}{2} \right) = \operatorname{sen} h \cos \frac{h \pm \zeta}{2} - \cos h \operatorname{sen} \frac{h \pm \zeta}{2};$$

y sustituyendo se obtendrá

$$x = \delta \cos h - \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h \pm \zeta}{2}.$$

Si se toma el arco AH con un número de grados igual al ángulo h , y los arcos BZ y BZ' con un número de grados igual al ángulo ζ ; y desde el punto H se trazan las secantes HZP y HQZ' , que cortan el eje AB en P y en Q ; estos dos puntos serán por los que deberá pasar la circunferencia del paralelo en cuestión.

En efecto está claro que se tendrá (al trazar la cuerda HGH' perpendicular al eje BA):

$$CG = \delta \cos h \quad \text{y} \quad GH = \delta \operatorname{sen} h;$$

además el ángulo $Z'HH'$ será $(180^\circ - h - \zeta)/2$, y el ángulo ZHH' será $(180^\circ - h + \zeta)/2$; luego

$$GQ = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h + \zeta}{2} \quad \text{y} \quad GP = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h - \zeta}{2};$$

por consiguiente

$$CQ = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h + \zeta}{2} - \delta \cos h$$

y

$$CP = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h - \zeta}{2} - \delta \cos h;$$

luego

$$x = -CQ \quad \text{o} \quad = -CP;$$

luego etc.

29. Si con centro G y radio GH se describe la circunferencia $Hzbz'H'$, y se toma en la circunferencia el arco Hb con un número de grados igual a h , y los arcos bz y bz' con un número de grados igual a ζ ; después se trazan las secantes Hb y Hb' prolongadas hasta el eje AB , ellas cortarán este eje en los puntos P , B y Q . Pues se tendrá: el ángulo $bHG = (180^\circ - h)/2$, el ángulo $z'HG = (180^\circ - h - \zeta)/2$ y el ángulo $zHG = (180^\circ - h + \zeta)/2$; luego

$$GP = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h - \zeta}{2}, \quad GQ = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h + \zeta}{2}$$

y

$$GB = \delta \operatorname{sen} h \cotg \frac{h}{2} = 2\delta \cos^2 \frac{h}{2} = \delta + \delta \cos h;$$

lo que concuerda con los resultados de arriba.

Esta última construcción será útil cuando la posición del punto G del Mapa esté dada, en lugar de la del centro C ; y veremos más abajo que ese punto G tiene la propiedad de que la cantidad m es un mínimo de acuerdo con la hipótesis de la Tierra esférica (**36**).

Por otra parte, a poco que se examine esta construcción, es fácil ver la conformidad que se da con los principios de la proyección estereográfica ordinaria; la longitud g y la distancia al polo h serán las que respondan al lugar del ojo en la superficie del globo; y el punto G del Mapa, que responde a la misma longitud g y a la distancia al polo $180^\circ - h$, será el centro de la proyección, es decir el punto del plano de proyección por el que pasa el diámetro del globo que lleva al lugar del ojo; por último la línea GH será igual a la distancia desde el ojo a ese mismo plano.

De ello se concluirá pues que el caso $c = 1$ da la conocida proyección estereográfica; y que así nuestras fórmulas generales encierran a la vez los dos tipos de Mapas más utilizados. Además se ve por esas fórmulas con cuánta facilidad se puede tener en cuenta el achatamiento de la Tierra en la misma proyección, puesto que no se trata sino de tomar, en lugar de la verdadera distancia al polo z , la distancia corregida ζ , que hemos visto (**19**) es poco más o menos igual a

$$z + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{sen} 2z.$$

30. En la superficie de la Tierra la circunferencia de cada paralelo está dividida por los meridianos en partes proporcionales a las diferencias de longitud; veamos pues cómo la circunferencia de los paralelos del Mapa estará dividida por los meridianos.

Si se traza desde el polo B al punto R la recta BR , y se traza en el punto R la perpendicular RS al eje AB ; es obvio que la tangente del ángulo RBA será igual a RS/BS . Ahora bien:

$$RS = y, \quad BC = \delta \quad \text{y} \quad CS = -x;$$

luego

$$BS = \delta + x,$$

y por consiguiente

$$\operatorname{tg} RBA = \frac{y}{\delta + x}.$$

Si se sustituyen x e y por sus valores dados por las fórmulas generales del n.º 21, se hallará, a causa de $\delta = 1/(2abc)$:

$$\operatorname{tg} RBA = \frac{b \operatorname{sen} [c(t - g)]}{a\theta^c + b \cos [c(t - g)]}.$$

Ahora bien se tiene en las fórmulas del n.º 27 (tomando los signos superiores):

$$CQ = -x = \frac{b - a\theta^c}{2abc(a\theta^c + b)};$$

luego

$$BQ = \delta - CQ = \frac{\theta^c}{bc(a\theta^c + b)} \quad \text{y} \quad AQ = \delta + CQ = \frac{1}{ac(a\theta^c + b)};$$

luego

$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{a\theta^c}{b};$$

sustituyendo este valor en la expresión precedente de $\operatorname{tg} RBA$, se obtendrá

$$\operatorname{tg} RBA = \frac{AQ \operatorname{sen} [c(t - g)]}{BQ + AQ \cos [c(t - g)]};$$

lo que proporciona la siguiente construcción para hallar el ángulo RBA .

Si se describe con centro Q y radio QA una circunferencia, y se divide la circunferencia comenzando en el polo A en partes que respondan a los ángulos $c(t - g)$; si a continuación se traza desde el otro polo B a cada una de estas divisiones rectas BR prolongadas si es necesario; estas líneas dividirán el paralelo PRQ en partes QR correspondientes a la diferencia de longitud $g - t$ entre los meridianos BA y BRA .

La circunferencia en cuestión se llama, a causa de esta propiedad, una *circunferencia divisora*; y en la proyección estereográfica, para la cual se tiene

$c = 1$, los arcos de esta circunferencia expresarán precisamente las diferencias de longitud.

31. Si se traza también desde el polo A hasta el mismo punto R la recta AR , y se llama λ a la recta BR y μ a la recta AR , es obvio que se tendrá

$$\lambda = \sqrt{(\delta + x)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \mu = \sqrt{(\delta - x)^2 + y^2};$$

si se sustituyen x e y por sus valores (21), recordándose que $\delta = 1/(2abc)$, se llegará a:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{a^2\theta^{2c} + 2ab\theta^c \cos [c(t - g)] + b^2}{b^2c^2 [a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]^2} \\ &= \frac{\theta^c}{b^2c^2 [a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{b^2\theta^{-2c} + 2ab\theta^{-c} \cos [c(t - g)] + a^2}{a^2c^2 [a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]^2} \\ &= \frac{\theta^{-c}}{a^2c^2 [a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]}; \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} 1.^\circ \quad & \frac{\lambda^2}{\mu^2} = \frac{a^2\theta^{2c}}{b^2}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a\theta^c}{b}, \\ 2.^\circ \quad & \frac{1}{\lambda^2\mu^2} = a^2b^2c^4 [a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]^2; \end{aligned}$$

y de ahí

$$\frac{1}{\lambda\mu} = abc^2 [a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}].$$

Si en esta última ecuación se sustituye θ^c por su valor $b\lambda/(a\mu)$ obtenido de la primera, se tendrá

$$\frac{1}{\lambda\mu} = a^2b^2c^2 \left[\frac{\lambda}{\mu} + 2 \cos [c(t - g)] + \frac{\mu}{\lambda} \right],$$

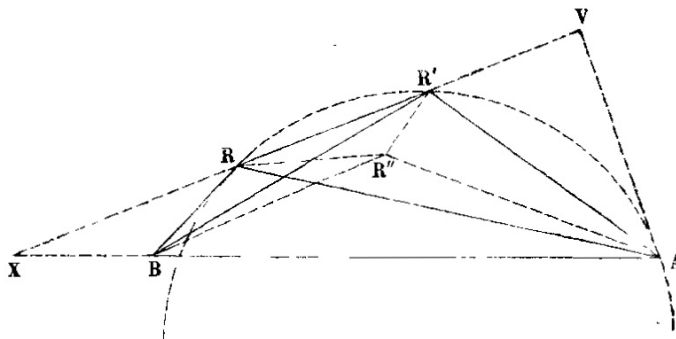
a saber, al multiplicar por $\lambda\mu$ y al sustituir abc por su valor $1/(2\delta)$,

$$4\delta^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu \cos [c(t - g)] + \mu^2.$$

Ahora bien, al considerar el triángulo BRA , en el cual

$$BA = 2\delta, \quad BR = \lambda \quad \text{y} \quad AR = \mu,$$

Fig. 2.



se tiene, como se sabe,

$$(2\delta)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\mu \cos BRA + \mu^2.$$

Luego, al comparar esta ecuación con la precedente, se obtendrá

$$-\cos BRA = \cos [c(t - g)],$$

y por consiguiente

$$BRA = 180^\circ - c(t - g).$$

De modo que se obtendrá $t - g$, es decir la diferencia de longitud de los meridianos BA y BRA , igual a $(180^\circ - BRA)/c$.

Respecto a la primera ecuación:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a\theta^c}{b},$$

si se sustituyen θ y b/a por sus valores: $\text{tg}(\zeta/2)$ y $[\text{tg}(h/2)]^c$, y se extrae la raíz c -ésima, dará

$$\frac{\text{tg} \frac{\zeta}{2}}{\text{tg} \frac{h}{2}} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}} = \left(\frac{RB}{RA} \right)^{\frac{1}{c}},$$

ecuación por la cual se conocerá la distancia al polo ζ del paralelo RQ , suponiendo conocida la distancia al polo h del paralelo DCE .

32. En general se ve por las fórmulas precedentes que, siendo conocidos los lugares de los polos A y B de un Mapa, y sabiendo además la longitud t y la distancia al polo ζ de un lugar cualquiera R , se podrá conocer fácilmente la longitud t' y la distancia al polo ζ' de otro lugar cualquiera R' (fig. 2).

Pues habiendo unido las rectas RB , RA , $R'B$ y $R'A$, se tendrá para el lugar R :

$$t - g = \frac{180^\circ - BRA}{c}, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{h}{2}} = \left(\frac{RB}{RA} \right)^{\frac{1}{c}},$$

e igual para el otro lugar R' :

$$t' - g = \frac{180^\circ - BR'A}{c}, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{h}{2}} = \left(\frac{R'B}{R'A} \right)^{\frac{1}{c}};$$

luego

$$t' - t = \frac{BRA - BR'A}{c} = \frac{R'AR - R'BR}{c},$$

y

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}} = \left(\frac{R'B}{RB} \frac{RA}{R'A} \right)^{\frac{1}{c}},$$

o bien

$$\operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2} : \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = \left(\frac{R'B}{R'A} \right)^{\frac{1}{c}} : \left(\frac{RB}{RA} \right)^{\frac{1}{c}}.$$

33. Si no se hubiera dado más que el lugar de uno de los polos B , pero se conocieran las longitudes t y t' y las distancias al polo ζ y ζ' de dos lugares cualesquiera R y R' , se podría mediante ellos hallar la longitud y la distancia al polo de otro lugar cualquiera. Toda la dificultad se reduce, como se ve, a encontrar el lugar del otro polo A .

Habiendo unido las tres líneas BR , BR' y RR' , está claro que el tamaño y la posición del triángulo BRR' están dados; sea A el lugar buscado del otro polo, y trácese también las rectas RA y $R'A$; por el número precedente se tendrá primero

$$R'AR = R'BR + c(t' - t),$$

de modo que el ángulo en el polo $R'AR$ será conocido. Describese pues sobre la cuerda RR' un arco capaz $RR'A$ del ángulo RAR' , y el polo buscado A se encontrará necesariamente en este arco.

Después se tendrá (32)

$$\frac{RA}{R'A} = \frac{RB}{R'B} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}} \right)^c,$$

de modo que la razón de las líneas RA y $R'A$ también será conocida.

Trácese en el punto A la tangente AV al arco, la cual encuentra en V la cuerda RR' prolongada; se sabe que el ángulo $R'AV$ es igual al ángulo VRA , y que así los triángulos ARV y $R'AV$ son semejantes; lo que da

$$RA : R'A = RV : VA = VA : R'V ,$$

y por consiguiente

$$\overline{RA}^2 : \overline{R'A}^2 = RV : R'V ; \quad \text{luego} \quad \overline{RA}^2 - \overline{R'A}^2 : \overline{R'A}^2 = RR' : R'V .$$

Así se hallará el punto V en la secante $RR'V$, desde el cual se traza después una tangente al arco; el punto de contacto A será el lugar del polo buscado.

34. Por último, si no se conocieran más que las longitudes t , t' y t'' y las distancias al polo ζ , ζ' y ζ'' de tres lugares cualesquiera R , R' y R'' cuyas posiciones están dadas en el Mapa, se podrían determinar los lugares de los polos B y A ; y mediante ellos las longitudes y las latitudes de todos los demás lugares del mismo Mapa. Pues habiendo trazado desde los tres lugares dados: R , R' y R'' , a los dos polos buscados: A y B , las seis rectas: RA , $R'A$, $R''A$, RB , $R'B$ y $R''B$, se tendrá (32):

$$BR'A - BRA = c(t - t') , \quad BR''A - BR'A = c(t' - t'')$$

y

$$\frac{RB}{RA} : \frac{R'B}{R'A} : \frac{R''B}{R''A} = \left(\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right)^c : \left(\operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2} \right)^c : \left(\operatorname{tg} \frac{\zeta''}{2} \right)^c ;$$

lo que proporciona como se ve cuatro ecuaciones, las cuales bastarán para la determinación de los dos puntos A y B .

El Problema en cuestión se reduce, en general, a este: *dados tres puntos: R , R' y R'' , construir sobre una misma base AB tres triángulos cuyos vértices estén en los puntos dados, y que sean tales que: 1.º las diferencias de los ángulos en el vértice: BRA , $BR'A$ y $BR''A$, estén dadas; 2.º las razones de los lados que comprenden estos ángulos, es decir, RB/RA , $R'B/R'A$ y $R''B/R''A$, estén entre ellas en razones dadas.*

Ahora bien este Problema me parece bastante difícil para resolver con Geometría; y en cuanto a la solución algebraica, yo no lo he intentado, sea por no apartarme demasiado de mi tema, sea también porque me parece que no tendría ningún uso, a menos que se pudiera reducir después a una construcción fácil.

Por lo demás, si se quisiera emprender esa solución, también se podrían utilizar las fórmulas generales del n.º 21. Pues al suponer que las coordenadas x e y responden al punto R , y designando por x' e y' las coordenadas del

punto R' , y por x'' e y'' las coordenadas del punto R'' , se obtendrán estas tres ecuaciones:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \overline{RR'}^2,$$

$$(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 = \overline{RR''}^2$$

y

$$(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 = \overline{R'R''}^2.$$

Sustituyendo pues x, y, x', y', x'' e y'' por sus valores, en los que las cantidades t, t' y t'' , así como θ, θ' y θ'' están dadas, se obtendrán tres ecuaciones que servirán para determinar las tres constantes a, b y g ; y el Problema estará resuelto en cuanto se conozcan los valores de estas constantes.

Mediante este Problema se podrá pues construir un Mapa en el que estén situados a voluntad tres lugares cualesquiera; lo que puede ser útil en algunas ocasiones.

35. Consideremos ahora la alteración causada por la proyección en el tamaño de los distintos lugares de la superficie de la Tierra, y veamos los modos de disminuirla. Ya hemos visto (21) que suponiendo el radio del ecuador de la Tierra igual a 1, el tamaño natural de cada lugar está aumentado o disminuido en el Mapa según la proporción $1 : m$, determinándose la cantidad m por esta fórmula:

$$m = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{\operatorname{sen} z [a^2 \theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2 \theta^{-c}]},$$

la cual, poniendo $1/(2\delta)$ en lugar de abc , $\operatorname{tg}(\zeta/2)$ en lugar de θ y $[\operatorname{tg}(h/2)]^c$ en lugar de b/a , se convierte en esta:

$$m = \frac{2c\delta\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{\operatorname{sen} z \left[\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{h}{2}} \right)^c + 2 \cos [c(t - g)] + \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{h}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}} \right)^c \right]}.$$

Primero es evidente que, respecto a la variable t , el valor más pequeño de m será cuando $t = g$, en cuyo caso la variación de m será nula; pues al hacer $t = g + \alpha$, se tendrá, mientras α sea muy pequeño:

$$\cos [c(t - g)] = 1 - \frac{c^2 \alpha^2}{2} + \frac{c^4 \alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots,$$

donde se ve que el término que contiene la primera potencia de α no se encuentra; en cuanto al término que contiene α^2 , será imposible eliminarlo, a menos que se suponga $c = 0$, lo que da el caso de las Cartas reducidas (22).

Ahora bien, siendo g la longitud del meridiano rectilíneo BA del Mapa, se deduce que los lugares situados en este meridiano son aquellos cuyo tamaño está menos alterado en longitud por la proyección; por tanto queda buscar la latitud del lugar que al mismo tiempo está sujeto a la menor alteración en latitud. Para ello no hay más que diferenciar el valor de m , haciendo variar solo z , y hacer nula después la diferencial. Este cálculo no tiene ninguna dificultad, pero para simplificarlo más será oportuno prescindir de la excentricidad ε de la Tierra, la cual al ser en efecto muy pequeña puede omitirse sin error apreciable, sobre todo en la presente investigación.

36. Antes vamos a poner el valor de m en una forma un poco diferente y más cómoda para el cálculo, introduciendo en lugar de las variables θ y t las distancias λ y μ . Para ello primero se sustituirá en lugar de

$$a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}$$

su valor hallado (31): $1/(abc^2\lambda\mu)$, o bien $2\delta/(c\lambda\mu)$; lo que dará:

$$m = \frac{c\lambda\mu\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{2\delta \sin z}.$$

Después se tendrá, por el mismo número,

$$\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = \operatorname{tg} \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}} = \operatorname{tg} \frac{z}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos z}{1 - \varepsilon \cos z} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \quad (21);$$

mediante lo cual se podrá eliminar el ángulo z .

Si despreciamos los términos afectados por el cuadrado de la excentricidad de los meridianos, ε^2 , se obtendrá

$$m = \frac{c\lambda\mu}{2\delta \sin z} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}};$$

ahora bien, como se sabe,

$$\sin z = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}};$$

luego, al sustituir el valor precedente, se obtendrá

$$\sin z = \frac{2}{\mu^{\frac{1}{c}} \lambda^{-\frac{1}{c}} \cotg \frac{h}{2} + \lambda^{\frac{1}{c}} \mu^{-\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{h}{2}},$$

y por consiguiente

$$m = \frac{c}{4\delta} \left(\lambda^{1+\frac{1}{c}} \mu^{1-\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{h}{2} + \lambda^{1-\frac{1}{c}} \mu^{1+\frac{1}{c}} \operatorname{cotg} \frac{h}{2} \right),$$

expresión general del valor de m en un punto cualquiera R del Mapa, la cual no depende más que de las dos distancias: $\lambda = RB$ y $\mu = RA$, desde ese punto a los dos polos.

37. Si se hace $c = 1$ para tener el caso de la proyección estereográfica (29), se obtendrá

$$m = \frac{\lambda^2 \operatorname{tg} \frac{h}{2} + \mu^2 \operatorname{cotg} \frac{h}{2}}{4\delta} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - (\lambda^2 - \mu^2) \cos h}{4\delta \sin h}.$$

Ahora bien se tiene (fig. 1):

$$\lambda^2 = \overline{RB}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{CB} - \overline{CS}^2$$

y

$$\mu^2 = \overline{RA}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{SA}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{CA} + \overline{CS}^2;$$

luego (a causa de $CA = CB$) se obtendrá:

$$\lambda^2 + \mu^2 = 2\overline{RS}^2 + 2\overline{CA}^2 + 2\overline{CS}^2$$

y

$$\lambda^2 - \mu^2 = -4CA \times CS;$$

además se tiene

$$CA \cos h = CG \quad \text{y} \quad \delta \sin h = CA \sin h = GH;$$

luego

$$m = \frac{\overline{RS}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{CS}^2 + 2CS \times CG}{2GH};$$

ahora bien

$$\overline{CA}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GH}^2;$$

y, uniendo los puntos G y R por la recta GR , se tiene también

$$\overline{GR}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{SG}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{CS}^2 + 2CS \times CG + \overline{CG}^2;$$

luego por último se obtendrá

$$m = \frac{\overline{GR}^2 + \overline{GH}^2}{2GH}.$$

Se ve por esta fórmula que el valor más pequeño de m estará en el punto G , que responde a una distancia al polo $z = BH' = 180^\circ - h$, y que es, como hemos dicho en el n.º 29, el centro de la proyección estereográfica; lo que por otra parte es evidente por la naturaleza de esta proyección.

38. Como el exponente de la proyección, c , es arbitrario veamos si a través de él se pueden disminuir más las variaciones de la cantidad m . Ya hemos observado más arriba (35) que los mínimos de esta cantidad deben caer necesariamente en lugares situados en el meridiano rectilíneo AB . Ahora bien cuando el punto R cae en AB , se tiene evidentemente

$$\lambda + \mu = AB = 2\delta;$$

de modo que, si la cantidad λ varía por ejemplo una cantidad cualquiera β , la cantidad μ deberá variar al mismo tiempo la cantidad $-\beta$.

Sustituyamos pues, en la expresión de m (36), $\lambda + \beta$ en lugar de λ , y $\mu - \beta$ en lugar de μ ; y, considerando la cantidad β muy pequeña, llevemos la precisión hasta β^2 ; obtendremos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} m = & \frac{c}{4\delta} \left(\lambda^{1+\frac{1}{c}} \mu^{1-\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{h}{2} + \lambda^{1-\frac{1}{c}} \mu^{1+\frac{1}{c}} \operatorname{cotg} \frac{h}{2} \right) \\ & + \frac{c\beta}{4\delta} \left[\left(\frac{c+1}{c} \lambda^{\frac{1}{c}} \mu^{1-\frac{1}{c}} - \frac{c-1}{c} \lambda^{1+\frac{1}{c}} \mu^{-\frac{1}{c}} \right) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{c-1}{c} \lambda^{-\frac{1}{c}} \mu^{1+\frac{1}{c}} - \frac{c+1}{c} \lambda^{1-\frac{1}{c}} \mu^{\frac{1}{c}} \right) \operatorname{cotg} \frac{h}{2} \right] \\ & + \frac{c\beta^2}{4\delta} \left[\left(\frac{c+1}{c^2} \lambda^{\frac{1}{c}-1} \mu^{1-\frac{1}{c}} - \frac{2(c^2-1)}{c^2} \lambda^{\frac{1}{c}} \mu^{-\frac{1}{c}} - \frac{c-1}{c^2} \lambda^{1+\frac{1}{c}} \mu^{-1-\frac{1}{c}} \right) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \right. \\ & \quad \left. + \left(-\frac{c-1}{c^2} \lambda^{-\frac{1}{c}-1} \mu^{1+\frac{1}{c}} - \frac{2(c^2-1)}{c^2} \lambda^{-\frac{1}{c}} \mu^{\frac{1}{c}} + \frac{c+1}{c^2} \lambda^{1-\frac{1}{c}} \mu^{-1+\frac{1}{c}} \right) \operatorname{cotg} \frac{h}{2} \right] \\ & \dots \end{aligned}$$

Para hacer desvanecer en esta expresión de m los términos afectados de la primera dimensión de β , se obtendrá la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \left[(c+1) \lambda^{\frac{1}{c}} \mu^{1-\frac{1}{c}} - (c-1) \lambda^{1+\frac{1}{c}} \mu^{-\frac{1}{c}} \right] \operatorname{tg} \frac{h}{2} \\ & + \left[(c-1) \lambda^{-\frac{1}{c}} \mu^{1+\frac{1}{c}} - (c+1) \lambda^{1-\frac{1}{c}} \mu^{\frac{1}{c}} \right] \operatorname{cotg} \frac{h}{2} = 0, \end{aligned}$$

a saber, al hacer $\lambda/\mu = n$ y reduciendo,

$$n^{\frac{1}{c}} [c+1 - (c-1)n] \operatorname{tg} \frac{h}{2} + n^{-\frac{1}{c}} [c-1 - (c+1)n] \operatorname{cotg} \frac{h}{2} = 0,$$

ecuación que dará el mínimo de la cantidad m , cualquiera que sea el valor de c .

Si se quieren eliminar también los términos afectados del cuadrado β^2 , se obtendrá esta otra ecuación:

$$n^{\frac{1}{c}} [c + 1 - 2(c^2 - 1)n - (c - 1)n^2] \operatorname{tg} \frac{h}{2} - n^{-\frac{1}{c}} [c - 1 + 2(c^2 - 1)n - (c + 1)n^2] \operatorname{cotg} \frac{h}{2} = 0;$$

y se podrán satisfacer estas dos ecuaciones a la vez por medio de las cantidades c y n vistas como incógnitas.

39. Ahora bien si se llama ϖ a la distancia al polo elevado o complemento de la latitud del lugar situado en el meridiano rectilíneo BA en el que las dos ecuaciones en cuestión serán observadas, se obtendrá, al sustituir en la fórmula del n.º **36**:

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}},$$

ϖ en lugar de z y n en lugar de λ/μ , se obtendrá, digo,

$$\operatorname{tg} \frac{\varpi}{2} = n^{\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{h}{2};$$

luego, a causa de

$$\operatorname{cotg} \frac{h}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{h}{2}},$$

las dos ecuaciones del número precedente, al ser multiplicadas por $n^{\frac{1}{c}} \operatorname{tg}(h/2)$, se convertirán en:

$$[c + 1 - (c - 1)n] \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} + c - 1 - (c + 1)n = 0$$

y

$$[c + 1 - 2(c^2 - 1)n - (c - 1)n^2] \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} - c + 1 - 2(c^2 - 1)n + (c + 1)n^2 = 0.$$

La primera da

$$n = \frac{(c + 1) \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} + c - 1}{(c - 1) \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} + c + 1},$$

y, al sustituir este valor en la segunda, ella se convertirá, después de haber hecho desvanecer las fracciones, en

$$\begin{aligned} & \left[(c+1)(c-1)^2 - (c-1)(c+1)^2 - 2(c^2-1)^2 \right] \left(1 + \operatorname{tg}^6 \frac{\varpi}{2} \right) \\ & + \left[2(c-1)(c+1)^2 - 2(c+1)(c-1)^2 - 2(c^2-1)(c-1)^2 \right. \\ & \left. - 2(c^2-1)(c+1)^2 + (c+1)^3 - (c-1)^3 - 2(c^2-1)^2 \right] \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\varpi}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

que se reduce a esta:

$$(c^2-1) \left(1 + \operatorname{tg}^6 \frac{\varpi}{2} \right) + (3c^2-7) \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\varpi}{2} \right) = 0;$$

de donde se obtiene

$$c^2 = \frac{1 + 7 \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} + 7 \operatorname{tg}^4 \frac{\varpi}{2} + \operatorname{tg}^6 \frac{\varpi}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} \right)^3},$$

a saber

$$c^2 = 1 + \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2} \right)^2} = 1 + 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\varpi}{2} \cos^2 \frac{\varpi}{2},$$

o más sencillamente:

$$c^2 = 1 + \operatorname{sen}^2 \varpi \quad \text{y} \quad c = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varpi}.$$

Teniendo c , se obtendrá n por la fórmula descrita más arriba, que se puede poner en esta forma más sencilla:

$$n = \frac{c - \cos \varpi}{c + \cos \varpi}.$$

El valor de c será el exponente de la proyección (22), y el valor de n dará la razón BK/AK de las partes del eje BA del Mapa en el punto K en que tendrán lugar las condiciones propuestas, y cuya longitud será g y la latitud $90^\circ - \varpi$.

40. Por tanto el lugar en cuestión tendrá esta propiedad: la cantidad m será más o menos constante en todos los lugares circunvecinos; de modo que el tamaño de las regiones circunvecinas estará alterado lo menos posible, y conservarán por consiguiente más o menos su forma natural, ya que por otro

lado cada parte infinitamente pequeña de la proyección ya es en sí misma semejante a la parte correspondiente de la Tierra, en virtud de la naturaleza de la proyección (4). De este modo, cuando haya que construir cualquier Mapa, será oportuno hacer que ese mismo lugar ocupe más o menos el centro del Mapa, porque entonces los países representados en el Mapa estarán deformados lo menos que sea posible, y siempre menos cuando más cerca aún estén respecto al centro.

Se escogerá pues, en la extensión del país que se propone proyectar en un Mapa, uno de los lugares principales que será situado más o menos en el centro del Mapa, y se hará la longitud de ese lugar igual a g , y su latitud, o altura del polo igual a $90^\circ - \varpi$; se obtendrá primero el exponente de la proyección:

$$c = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varpi}.$$

Después, para construir el Mapa, habrá que situar ese mismo lugar en un punto cualquiera K que esté hacia el centro del Mapa, y habiendo trazado una recta BA , se tomará a un lado y a otro del punto K las partes BK y AK tales que

$$BK : AK = (c - \cos \varpi) : (c + \cos \varpi);$$

el punto B será el polo boreal del Mapa y el punto A será el polo austral; la distancia BA será el eje mismo del Mapa, cuya longitud es arbitraria, y depende del tamaño o de la escala que se quiera dar al Mapa.

Se buscará además el ángulo h que representa a la distancia al polo, o complemento de la latitud del lugar que debe ocupar el centro C del Mapa, por la fórmula:

$$\operatorname{tg} \frac{\varpi}{2} = n^{\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{h}{2}$$

del n.º 39, en la que $n = KB/KA$, de modo que se tendrá

$$\operatorname{tg} \frac{h}{2} = \left(\frac{KA}{KB} \right)^{\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{\varpi}{2};$$

y se obtendrán todos los elementos necesarios para la construcción del Mapa propuesto.

41. Cuando el exponente de la proyección, c , está dado, como en la proyección estereográfica donde $c = 1$ (29), no se puede hacer desaparecer en la expresión de m más que los términos afectados de la primera dimensión de β , tomando (39)

$$n = \frac{KB}{KA} = \frac{c - \cos \varpi}{c + \cos \varpi};$$

y es obvio que la variación de m y por consiguiente la deformación del Mapa será siempre más grande en este caso que en el caso precedente, donde se

da a c un valor conveniente para hacer desaparecer también las segundas dimensiones de β .

Al hacer $c = 1$ en la proyección estereográfica, se obtiene

$$n = \frac{1 - \cos \varpi}{1 + \cos \varpi} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varpi}{2};$$

pero se tiene, en general, cuando $c = 1$,

$$\operatorname{tg} \frac{\varpi}{2} = n^{\frac{1}{c}} \operatorname{tg} \frac{h}{2} = n \operatorname{tg} \frac{h}{2};$$

luego

$$n = n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad n = \cotg^2 \frac{h}{2} = \frac{1 + \cos h}{1 - \cos h} = \frac{GB}{GA};$$

pero $n = KB/KA$; luego el punto K cae en G , lo que concuerda con lo que hemos visto más arriba (37).

Ahora bien, por la expresión general de m dada en ese número, es fácil ver que el valor de m en los lugares situados en el eje BA a una distancia cualquiera β desde el punto G será

$$\frac{\overline{GH}^2 + \beta^2}{2GH};$$

de donde resulta que, por mucho valor que pueda tener la cantidad GH , jamás podrá desaparecer la segunda dimensión de β del valor de m , a menos que se suponga $GH = \infty$, lo que sería absurdo, pues entonces se obtendría también $m = \infty$. Luego no desaparecerá tampoco en el caso del n.º 39, cuando el valor de ϖ sea tal que $c = 1$, lo que ocurre al hacer $\sin \varpi = 0$, y por consiguiente $\varpi = 0$ o $= 180^\circ$, es decir, cuando uno o el otro polo deben ocupar el centro del Mapa, en cuyo caso se obtendría la proyección estereográfica polar; de esto también puede convencerse por las fórmulas mismas de los n.ºs 38 y 39.

En efecto si se supone, lo que es lo mismo, $\sin \varpi$ infinitamente pequeño e igual a i , se tendrá:

$$c = 1 + \frac{i^2}{2} \quad \text{y} \quad \cos \varpi = 1 - \frac{i^2}{2},$$

luego

$$n = \frac{i^2}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \frac{\varpi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varpi}{1 + \cos \varpi}} = \frac{i}{2},$$

luego, a causa de $\operatorname{tg}(\varpi/2) = n^{1/c} \operatorname{tg}(h/2)$, se obtendrá:

$$\operatorname{tg} \frac{h}{2} = \frac{1}{i} \quad \text{y} \quad \cotg \frac{h}{2} = i.$$

Ahora bien:

$$\frac{\lambda}{\mu} = n \quad \text{y} \quad \lambda + \mu = 2\delta;$$

se tendrá pues

$$\lambda = \delta i^2 \quad \text{y} \quad \mu = 2\delta.$$

Sustituyendo estos diferentes valores en la expresión general de m del n.º 38 y despreciando lo que se debe despreciar a causa de i infinitamente pequeño, se obtendrá:

$$m = 2\delta i - \beta i + \frac{\beta^2}{2\delta i},$$

donde se ve que el término afectado por β desaparece al hacer $i = 0$, pero no el que contiene β^2 . Este es el único caso en el que los resultados generales del n.º 39 tienen una excepción; lo que ocurre es que la ecuación que proviene de la eliminación del coeficiente de β^2 ha sido multiplicada por la cantidad $n^{1+1/c} \operatorname{tg}(h/2)$, la cual en el caso presente se convierte en $i^3/4$. He creído que debía entrar en este pequeño detalle para levantar la contradicción aparente que se habría podido observar entre los resultados de los n.ºs 37 y 39.

42. Supongamos que se tratase de construir un Mapa cuyo centro deba estar ocupado por la ciudad de Berlín; se tendrá pues:

$$g = 31^\circ 2' \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 90^\circ - \varpi = 52^\circ 31' \frac{1}{2},$$

por consiguiente

$$\varpi = 37^\circ 28' \frac{1}{2};$$

de ahí se hallará

$$c = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \left(37^\circ 28' \frac{1}{2} \right)} = 1,1706,$$

y

$$n = \frac{0,3770}{1,9642} = 0,19194.$$

Se tomará pues como exponente de la proyección, c , el número 1,17, que difiere poco, como se ve, de la unidad; de modo que la proyección no se alejará mucho de la proyección estereográfica; después, al suponer que Berlín está en el punto K , se determinarán los polos B y A de modo que $KB/KA = 0,192$, es decir, se tomará $KB : KA$ como 19 es a 100 aproximadamente.

Referencias

- Adams, O. S., 1919, *General theory of polyconic projections*, U.S. Coast and Geodetic Survey, Special Publication 57, Washington D. C. Reimprimido en 1934.
- Bell, P. O., 1941, *A characterization of the group of homographic transformations*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 47, núm. 6, pp. 488-493.
- Bermejo, M., 2004, *Análisis de la proyección tranversa de Mercator*, Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid.
- Bermejo, M., Otero, J., 2005, *Minimum conformal mapping distortion according to Chebyshev's principle: a case study over peninsular Spain*, Journal of Geodesy, vol. 79, núms. 1-3, pp. 124-134.
- Blumenthal, L. M., Wahlin, G. E., 1941, *On the spherical surface of smallest radius enclosing a bounded subset of n -dimensional euclidean space*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 47, núm. 10, pp. 771-777.
- Bonnet, O., 1852, *Thèse d'Astronomie. Sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Première serie, vol. 17, pp. 301-340.
- Brown, B. H., 1935, *Conformal and equiareal world maps*, American Mathematical Monthly, vol. 42, núm. 4, pp. 212-223.
- Bugayevskiy, L. M., Snyder, J. P., 1995, *Map projections. A reference manual*, Taylor and Francis, London.
- Butzer, P. L., Jongmans, F., 1989, *P. L. Chebyshev (1821-1894) and his contacts with Western European scientists*, Historia Mathematica, vol. 16, núm. 1, pp. 46-68.

- Butzer, P. L., Jongmans, F., 1999, *P. L. Chebyshev (1821-1894). A guide to his life and work*, Journal of Approximation Theory, vol. 96, núm. 1, pp. 111-138.
- Carne, K., 1990, *The Schwarzian derivative for conformal maps*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 408, pp. 10-33.
- Cayley, A., 1881, *On the Schwarzian derivative, and the polyhedral functions*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 13, part I, pp. 5-68. En *The Collected Mathematical Papers Of Arthur Cayley*, Cambridge University Press, London, vol. 11, núm. 745, pp. 148-216, 1896.
- Chebyshev, P. L., 1852, *Rapport du professeur extraordinaire de l'université de St. Pétersbourg Tchebychef sur son voyage à l'étranger*. En *Oeuvres de P. L. Tchebychef*, vol. 2, St. Pétersbourg, 1907, pp. VII-XIX.
- 1856a, *Sur la construction des cartes géographiques*. En *Oeuvres de P. L. Tchebychef*, vol. 1, St. Pétersbourg, 1899, pp. 233-236.
- 1856b, *Sur la construction des cartes géographiques*. En *Oeuvres de P. L. Tchebychef*, vol. 1, St. Pétersbourg, 1899, pp. 239-247.
- Close, C. F., 1905, *Text book of topographical and geographical surveying*, Harrison and sons, London.
- Comenetz, G., 1938, *Kasner's invariant and trihornometry*, American Mathematical Monthly, vol. 45, núm. 2, pp. 82-87.
- Craig, T., 1882, *A treatise on projections*, U.S. Coast and Geodetic Survey, Washington.
- Daners, D., 2012, *The Mercator and stereographic projections, and many in between*, American Mathematical Monthly, vol. 119, núm. 3, pp. 199-210.
- Darboux, J. G., 1887, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Première partie: Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima, Gauthier-Villars, Paris.
- Dearing, P. M., Zeck, C. R., 2009, *A dual algorithm for the minimum covering ball problem in \mathbb{R}^n* , Operations Research Letters, vol. 37, núm. 3, pp. 171-175.
- Dictionary of Scientific Biography, 1970, vol. 5, Charles Scribner's Sons, Edición 1981, New York.

- Dienger, J., 1852, *Du tracé géographique des surfaces courbes les unes sur les autres, et application de ce tracé à la construction des cartes géographiques*, Nouvelles annales de mathématiques, Primera serie, vol. 11, pp. 252-268.
- Do Carmo, M. P., 1992, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial, Madrid.
- Dombrowski, P., 1979, *150 years after Gauss' «disquisitiones generales circa superficies curvas», with the original text of Gauss*, Astérisque, vol. 62, pp. 1-153, Société Mathématique de France.
- Driencourt, L., Laborde, J., 1932, *Traité des projections des cartes géographiques à l'usage des cartographes et des géodésiens*, Cuatro volúmenes, Librairie Scientifique Hermann, Paris.
- Duren, P. L., 1983, *Univalent functions*, Springer-Verlag, New York.
- Euler, L., 1777, *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, Acta academiae scientiarum Petropolitanae, vol. 1, 1778, pp. 107-132. En: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, Lausannae, Primera serie, vol. 28, pp. 248-275, 1955.
- Flanders, H., 1970, *The schwarzian as a curvature*, Journal of Differential Geometry, vol. 4, núm. 4, pp. 515-519.
- Gauss, C. F., 1822, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*. En Werke, vol. 4, Göttingen, 1873, pp. 189-216. Existe traducción de E. Beltrami: *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*, 1861, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Primera serie, vol. 4, núm. 1, pp. 214-232.
- Gehring, F. W., 1978, *Spirals and the universal Teichmüller space*, Acta Mathematica, vol. 141, núm. 1, pp. 99-113.
- Germain, A., 1866, *Traité des projections des cartes géographiques, représentation plane de la sphère et du sphéroïde*, Arthus Bertrand, Paris.
- Goodman, A. W., 1968, *Curvature under an analytic transformation*, Journal of the London Mathematical Society, vol. 43, pp. 527-533.

- Grafarend, E. W., Syffus, R., 1998, *The solution of the Korn-Lichtenstein equations of conformal mapping: the direct generation of ellipsoidal Gauß-Krüger conformal coordinates or the Transverse Mercator Projection*, Journal of Geodesy, vol. 72, núm. 5, pp. 282-293.
- Grave, D., 1896, *Sur la construction des Cartes géographiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Quinta serie, vol. 2, pp. 317-362.
- Grave, D., 1911, *Démonstration d'un théorème de Tchébychef généralisé*, Crelle's Journal (Journal für die reine und angewandte Mathematik), vol. 140, pp. 247-251.
- Hille, E., 1959, *Analytic function theory*, vol. 1, Second edition, Chelsea Publishing Company, New York.
- 1962, *Analytic function theory*, vol. 2, Second edition, Chelsea Publishing Company, New York.
- Jacobi, C. G. J., 1884, *Gesammelte Werke. Supplementband. Vorlesungen über Dynamik*, Vorlesung 28: *Die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Das Problem der Kartenprojection*, pp. 212-221, Druck und Verlag von G. Reimer, Berlin.
- Kasner, E. DeCicco, J., 1945, *Geometry of scale curves in conformal maps*, American Journal of Mathematics, vol. 67, núm. 1, pp. 157-166.
- Klein, F., 1884, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Traducción inglesa de G. G. Morrice: *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, 1888. Second revised edition, Dover Publications, 1956, New York.
- Klingenberg, W., 1978, *Curso de geometría diferencial*, Editorial Alhambra, Madrid.
- Knopp, K., 1952, *Elements of the theory of functions*, Translated by Frederick Bagemihl, Dover Publications, New York.
- König, R., Weise, K. H., 1951, *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie*, tomo 1: *Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen*, Springer-Verlag, Berlin.
- Kreyszig, E., 1968, *Introduction to differential geometry and Riemannian geometry*, University of Toronto Press, Birkenhead.

- Kummer, E., 1836, *Über die hypergeometrische Reihe...*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 15, pp. 39-83 y 127-172.
- Lagrange, J. L., 1779, *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (année 1779), Berlin, 1781, Premier Mémoire: pp. 161-185, Second Mémoire: pp. 186-210. También en: *Œuvres de Lagrange*, tomos 1 a 14, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892, tomo 4, pp. 637-692, 1869.
- Lamb, H., 1942, *An elementary course of infinitesimal calculus*, Third edition, Cambridge University Press, London.
- Lambert, J. H., 1772, *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten*. Sección 6 de la tercera parte de: *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin. Traducción inglesa de W. R. Tobler: *Notes and comments on the composition of terrestrial and celestial maps*, Esri Press, Redlands, 2011.
- Laplaza, S. A., 1940, *Cartografía conforme del elipsoide de revolución con aplicación al mapa de España (I)*, Revista Matemática Hispanoamericana, núms. 1-3, pp. 8-43.
- 1941, *Cartografía conforme del elipsoide de revolución con aplicación al mapa de España (II)*, Revista Matemática Hispanoamericana, núms. 3 y 4, pp. 141-162 y 215-228.
- Lehmann, G., 1939, *Ueber die Lagrangeschen Projektionen*, Zeitschrift für Vermessungswesen, vol. 68, núm. 11, pp. 329-344.
- Lehto, O., 1987, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, New York.
- Levallois, J. J., 1970, *Géodésie générale*, tomo 2: *Géodésie classique bidimensionnelle*, Éditions Eyrolles, Paris.
- Levinson, N., Redheffer, R. M., 1990, *Curso de variable compleja*, Editorial Reverté, Barcelona.
- Markushevich, A., 1970, *Teoría de las funciones analíticas*, Tomo I, Editorial Mir, Moscú.
- Marsden, J. E., Tromba, A. J., 1991, *Cálculo vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington.

- Marsden, J. E., Tromba, A. J., Weinstein, A., 1993, *Basic multivariable calculus*, Springer-Verlag, New York.
- Milnor, J., 1969, *A problem in cartography*, American Mathematical Monthly, vol. 76, núm. 10, pp. 1101-1112.
- Nabonnand, P., 2012, *Le problème mathématique des cartes géographiques au 19^e siècle*, Actas de la Academia Nacional de Ciencias (Córdoba, República Argentina), Tomo 15, pp. 101-117.
- Needham, T., 1997, *Visual complex analysis*, Oxford University Press, New York.
- Nehari, Z., 1952, *Conformal mapping*, McGraw-Hill. Dover Publications, 1975, New York.
- Ogilvy, C. S., 1990, *Excursions in geometry*, Dover Publications, New York.
- Osgood, B. G., 1998, *Old and new on the schwarzian derivative*. Páginas 275-308 de *Quasiconformal mappings and analysis. A collection of papers honoring F. W. Gehring*, P. L. Duren, J. M. Heinonen, B. G. Osgood y B. P. Palka editores, Springer-Verlag, New York.
- Otero, J., 1997, *A best harmonic approximation problem arising in cartography*, Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, vol. XLV, pp. 471-492.
- 2006-2007, Notas del curso de doctorado *Proyecciones cartográficas óptimas*, Universidad Complutense, no publicado.
- Ovsienko, V., Tabachnikov S., 2009, *What is the Schwarzian Derivative?*, Notices of the American Mathematical Society, vol. 56, núm. 1, pp. 34-36.
- Rademacher, H., Toeplitz, O., 1970, *The enjoyment of mathematics*, Princeton University Press, Princeton.
- Schwarz, H. A., 1869, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 70, pp. 105-120.
- Schwarz, H. A., 1890, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. 2, Verlag von Julius Springer, Berlin.
- Servicio Geográfico del Ejército, 1971, *Apuntes de cartografía*, Fascículo tercero, Segunda edición corregida y aumentada, Madrid.

- Shamos, M. I., 1978, *Computational geometry*, Tesis doctoral, Yale University, New Haven.
- Silverman, H., 1975, *Complex variables*, Houghton Mifflin, Boston.
- Silverman, B. W., Titterton, D. M., 1980, *Minimum covering ellipses*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, vol. 1, núm. 4, pp. 401-409.
- Snyder, J. P., Steward, H., 1988, *Bibliography of map projections*, U.S. Geological Survey Bulletin 1856, Second edition, 1997, Washington D. C.
- Snyder, J. P., Voxland, P. M., 1989, *An album of map projections*, U.S. Geological Survey professional paper 1453, Washington D. C.
- Snyder, J. P., 1993, *Flattening the earth: two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago.
- Sobel, D., 1997, *Longitud*, Debate, Madrid.
- Spiegel, M. R., 1979, *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, McGraw-Hill, México D. F.
- Struik, D. J., 1950, *Lectures on classical differential geometry*, Addison-Wesley, Second edition, 1961. Dover Publications, 1988, New York.
- Thurston, W. P., 1986, *Zipers and univalent functions*, Mathematical Surveys and Monographs (American Mathematical Society), vol. 21, pp. 185-197.
- Tissot, N. A., 1881, *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Gauthier-Villars, Paris.
- Volkovyski, L., Lunts, G., Aramanovich, I., 1984, *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*, Editorial Mir, Moscú.
- VonderMühl, K., 1868, *Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen*, Crelle's Journal (Journal für die reine und angewandte Mathematik), vol. 69, pp. 264-285.
- Wangerin, A., 1894, *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelscharten von J. H. Lambert (1772)*, Ostwald's klassiker der exakten wissenschaften, núm. 54, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig.

— 1894, *Ueber kartenprojection. Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822)*, Ostwald's klassiker der exakten wissenschaften, núm. 55, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig.

Zakatov, P. S., 1981, *Curso de geodesia superior*, Editorial Mir, Moscú.

Zinger, N. Y., 1906, *La projection de Lagrange appliquée à la Carte de la Russie d'Europe*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Académie des Sciences (France), Bachelier o Gauthier-Villars, Paris, tomo 143, pp. 211-213.